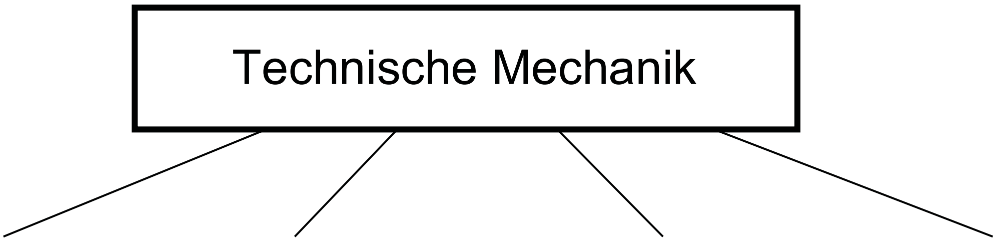
Teil B. Festigkeitslehre

B.1. Einleitung



1.1 Berechnungen in der Technischen Mechanik

In der Praxis sind für Bauteile nicht nur Schnittgrößen, sondern - für die Auslegung sogar wichtiger - Spannungen und Verformungen zu berechnen. Dies geschieht nach folgendem Schema:

Lasten und statisches System

Schnittgrößen N, V, M

Spannungen

Dehnungen

Verformungen

Konkrete Nachweise sind in der Regel für die Spannungen und für die Verformungen entsprechend der Vorschriften (z.B. Eurocode 5 für Holzbauten) zu führen. Es ist nachzuweisen, dass die in der Norm aufgeführten zulässigen Werte unter Beachtung der erforderlichen Sicherheitsbeiwerte nicht überschritten werden.

1.2 Materialgesetze

Sobald Dehnungen oder Verformungen eine Rolle spielen, muss das Materialverhalten des Werkstoffs in die Berechnung einbezogen werden. Den Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen (entsprechend zwischen Kraft und Verformung) nennt man

Werkstoffgesetz

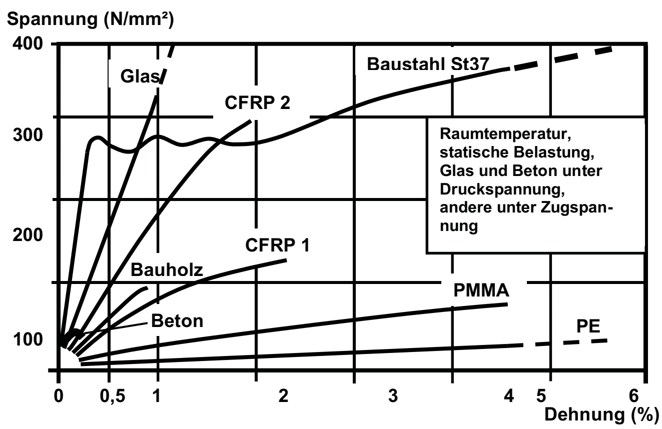
Das einfachste Werkstoffgesetz ist das linear elastische Werkstoffgesetz, das sogenannte:

Der Elastizitätsmodul (E-Modul) ist eine Werkstoffkonstante und beträgt z.B. für

Holz:

Baustahl:

In der Realität verhalten sich die Werkstoffe häufig alles andere als linear elastisch. Trotzdem wird bis auf wenige Ausnahmen bei statischen Berechnungen von dieser Annahme ausgegangen. Die Begründung liegt darin, dass bei fast allen Werkstoffen das Hookesche Gesetz in dem Spannungsbereich, der für Tragwerke planmäßig ausgenutzt werden darf, eine gute Näherung darstellt. Nur wenn die Lasten so groß werden, dass Spannungen nahe der Versagensgrenze (z.B. Streckgrenze) auftreten, muss das tatsächliche Werkstoffverhalten berücksichtigt werden. Dies ist mit Computerprogrammen möglich.

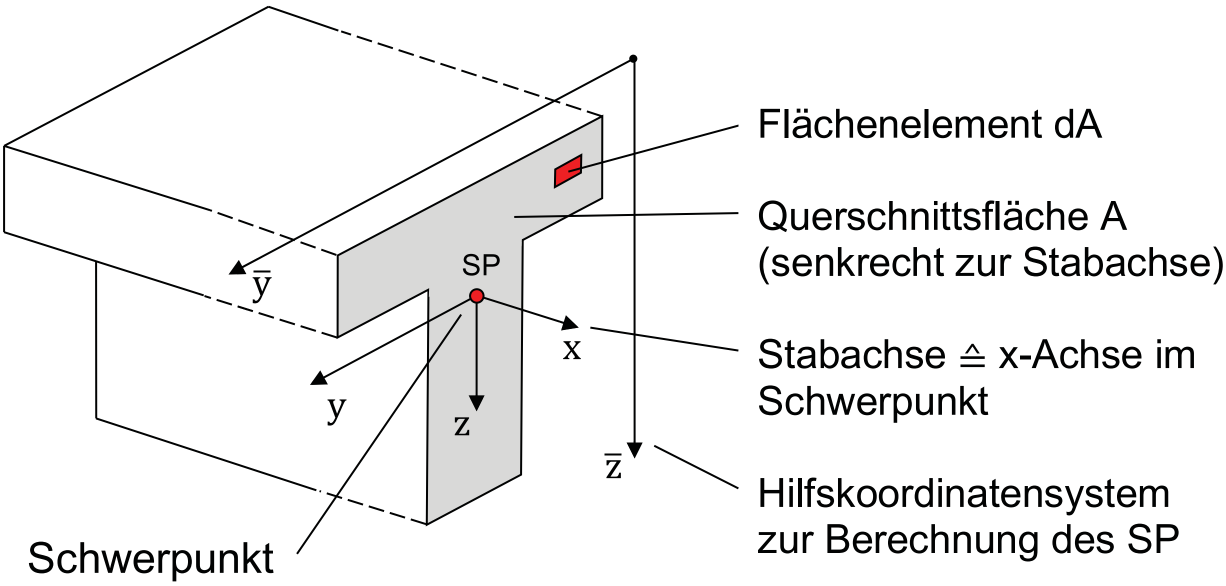


Im Kapitel B gehen wir von den üblichen Annahmen der Elastiztitätstheorie aus:

- Hookesches Gesetz (d.h. ideal elastisch ohne Bruch- oder Fließkriterium)
- Material isotrop und homogen

2. Querschnittsflächen

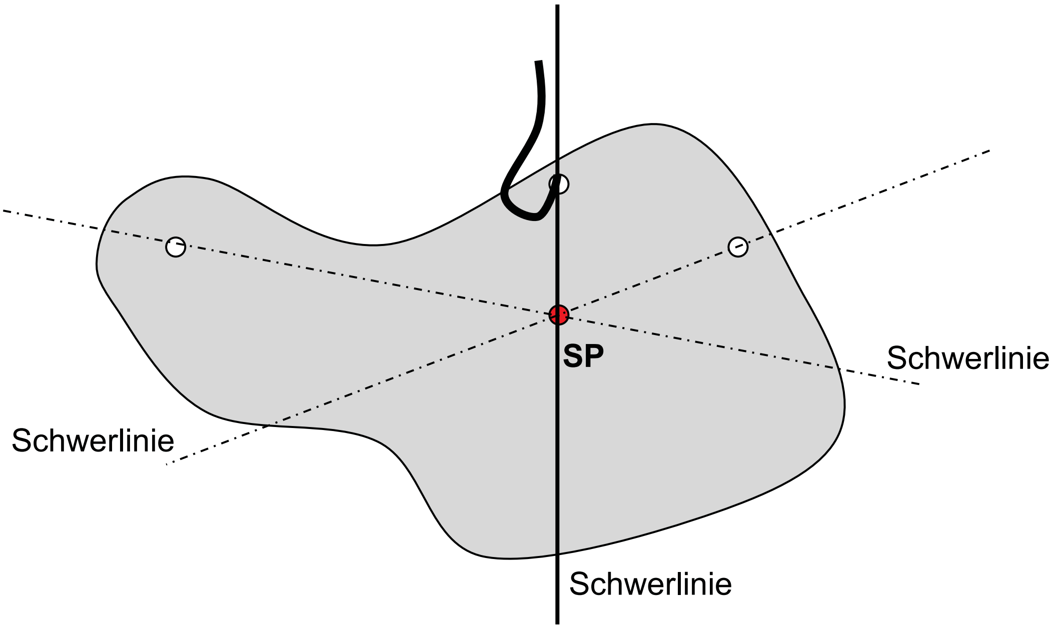
Die Querschnittsfläche in der Statik ist die Fläche, die ein Stab in einem Schnitt senkrecht zur Stabachse (Schwerachse = x-Achse) aufweist.



Oft lässt sich die Querschnittsfläche als Summe einfacher Teilflächen berechnen:

In der folgenden Tabelle sind für viele Formen die wichtigsten statischen Kennwerte zusammengestellt.

B.3. Schwerpunktberechnung



Der Punkt, in dem man sich alle Massenkräfte vereinigt denken kann, wird als (Masse-)Schwerpunkt (SP) bezeichnet.
Jede durch diesen Punkt gehende Linie heißt Schwerlinie. Ist der Körper in Bezug auf die Dichte homogen, kann der Schwerpunkt anhand der geometrischen Abmessungen bestimmt werden (geometrischer Schwerpunkt).

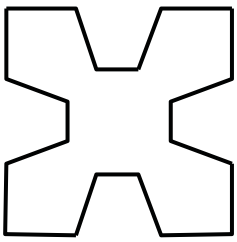
Der Schwerpunkt kann rechnerisch mit Hilfe des Momentensatzes ermittelt werden. Dazu wählen wir uns zunächst ein Hilfskoordinatensystem, welches wir mit $\bar{y}$ und $\bar{z}$ bezeichnen, um es vom späteren "richtigen" Koordinatensystem y-z, welches im Schwerpunkt seinen Ursprung hat, zu unterscheiden.

Den Ursprung des Hilfskoordinatensystems sollte man so wählen, dass der ganze betrachtete Querschnitt im positiven 1. Quadranten liegt. Ausnahme sind symmetrische Querschnitte, wo es sich anbietet, auch schon das Hilfskoordinatensystem in die Symmetrieachse zu legen.

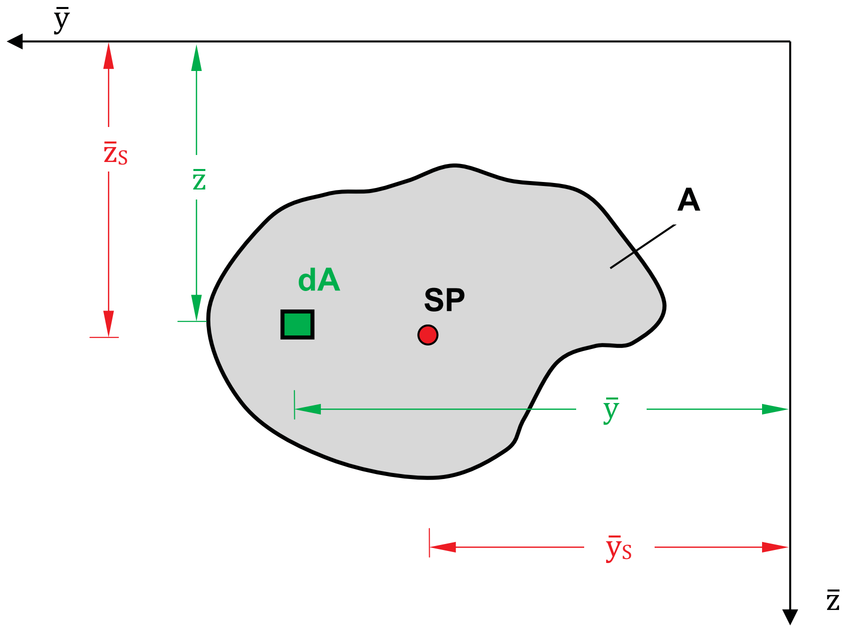
Merke: Symmetrieachsen sind stets auch Orte des Schwerpunktes.

Bei einem doppelt-symmetrischen Querschnitt erübrigt sich somit die rechnerische Bestimmung des Schwerpunkts!

Beispiel (Prüfung 2006):



3.1 Berechnung des Flächenschwerpunkts



Lage des Schwerpunkts in y-Richtung:

$$A \cdot \bar{y}_s = \int_A \bar{y} dA \quad \rightarrow \quad \bar{y}_s = \frac{\int_A \bar{y}\, dA}{A} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_s = \frac{\sum \bar{y}_i \cdot A_i}{A}$$

Lage des Schwerpunkts in z-Richtung:

$$A \cdot \bar{z}_s = \int_A \bar{z} dA \quad \rightarrow \quad \bar{z}_s = \frac{\int_A \bar{z}\, dA}{A} \quad \rightarrow \quad \bar{z}_s = \frac{\sum \bar{z}_i \cdot A_i}{A}$$

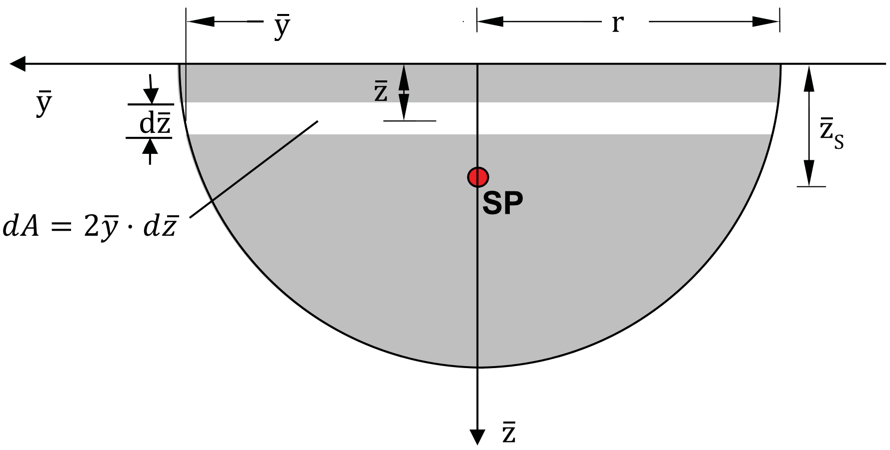
Die Ausdrücke

$$S_{\bar{y}} = \int \bar{z} dA \qquad \text{und} \qquad S_{\bar{z}} = \int \bar{y} dA$$

definieren die Flächenmomente 1. Grades (die sog. statischen Momente) der Fläche A um die $\bar{z}$- bzw. $\bar{y}$-Achse. Daraus ergeben sich die Koordinaten des Schwerpunkts:

$$\bar{y}_s = \frac{S_{\bar{z}}}{A} \qquad \text{und} \qquad \bar{z}_s = \frac{S_{\bar{y}}}{A}$$

Beispiel: Schwerpunkt eines Halbkreises



$$\bar{r}^2 = \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \qquad \rightarrow \qquad \bar{y} = \sqrt{r^2 - \bar{z}^2} \text{ im 1. Quadranten}$$

$$A = \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$$

Lage des Schwerpunkts in $\bar{z}$-Richtung:

$$A \cdot \bar{z}_s = \int_A \bar{z} \cdot dA = \int_0^r \bar{z} \cdot 2\bar{y} \cdot d\bar{z}$$

$$A \cdot \bar{z}_s = \int_0^r \bar{z} \cdot 2\sqrt{r^2 - \bar{z}^2} \cdot d\bar{z} = -\frac{2}{3}\sqrt{(r^2 - \bar{z}^2)^3}\Bigg]_0^r$$

$$A \cdot \bar{z}_s = \frac{2}{3}\sqrt{r^6} = \frac{2}{3}r^3$$

$$\bar{z}_s = \frac{2\,r^3}{3\,A} = \frac{2\,r^3 \cdot 2}{3 \cdot r^2 \cdot \pi} = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} = 0{,}4244 \cdot r$$

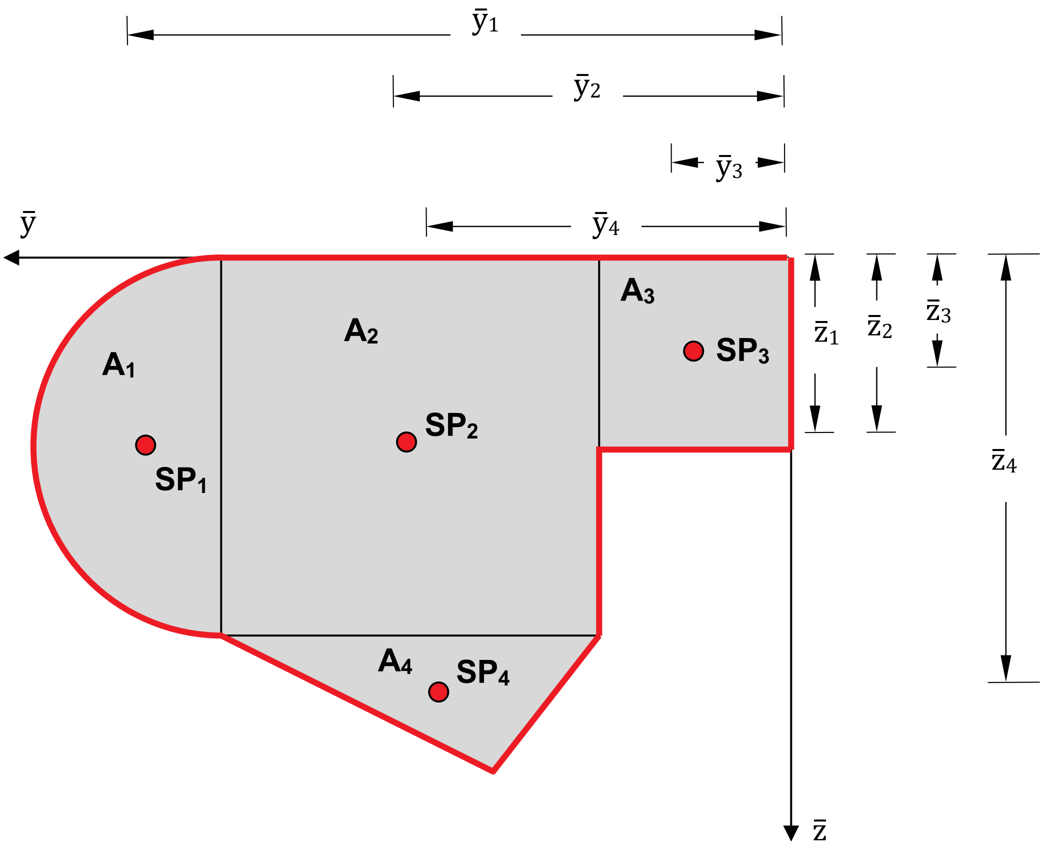
3.2 Schwerpunkt zusammengesetzter Flächen

Besteht ein Querschnitt aus mehreren zusammengesetzten Einzelflächen, ist eine geschlossene Lösung nicht möglich. Der Schwerpunkt in n Teilfächen zerlegt und nach dem Momentensatz bestimmt:

$$A_{ges} = \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots$$

$$\bar{y}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \bar{y}_i}{A_{ges}} = \frac{A_1 \cdot \bar{y}_1 + A_2 \cdot \bar{y}_2 + A_3 \cdot \bar{y}_3 + A_4 \cdot \bar{y}_4 + \cdots}{A_{ges}}$$

$$\bar{z}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \bar{z}_i}{A_{ges}} = \frac{A_1 \cdot \bar{z}_1 + A_2 \cdot \bar{z}_2 + A_3 \cdot \bar{z}_3 + A_4 \cdot \bar{z}_4 + \cdots}{A_{ges}}$$



Bei Systemen, die aus einer Vielzahl von Einzelflächen zusammengesetzt sind, kann die Auswertung in Tabellenform übersichtlicher sein.

Tabelle zur Ermittlung der Schwerpunktlage von zusammengesetzten Einzelflächen:

1	2	3	4	5	6
Nummer der Fläche:	A_i	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$	$A_i \cdot \bar{y}_i$	$A_i \cdot \bar{z}_i$
	cm²	cm	cm	cm³	cm³
1					
2					
|					
|					
n					
$\sum$	$A=\sum A_i$	---	---	$S_{\bar{z}}= \sum A_i \cdot \bar{y}_i$	$S_{\bar{y}}= \sum A_i \cdot \bar{z}_i$

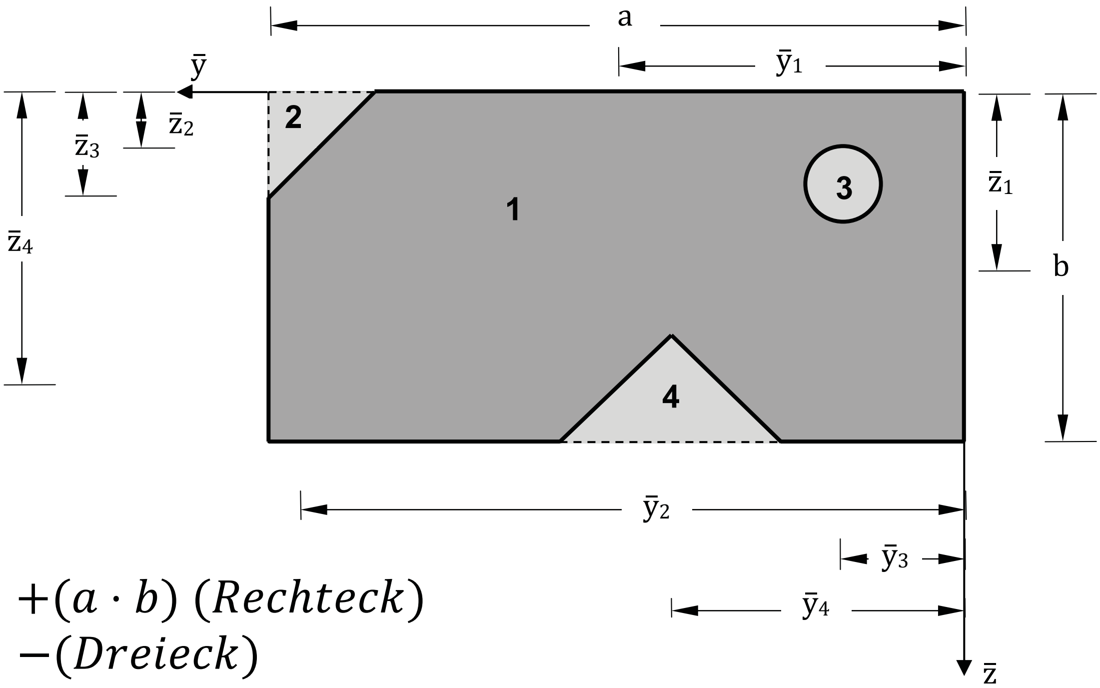
$$\bar{y}_s = \frac{S_{\bar{z}}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{Spalte\ 5}{Spalte\ 2}$$

$$\bar{z}_s = \frac{S_{\bar{y}}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \bar{z}_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{Spalte\ 6}{Spalte\ 2}$$

Hinweis:
Auf der Community befindet sich eine Excel-Tabelle(Schwerpunkt.xls), die nach diesem Schema funktioniert und für eigene Berechnungen angepasst werden kann.

3.3 Querschnitte mit Öffnungen und Aussparungen

Besitzt ein Querschnitt Öffnungen, Nuten oder Aussparungen, so werden diese Fehlflächen als negative Querschnittsflächen betrachtet. Die Ermittlung des Schwerpunktes erfolgt ebenfalls mit dem Momentensatz.



$$A_1 = +(a \cdot b)\ (Rechteck)$$
$$A_2 = -(Dreieck)$$
$$A_3 = -(Kreis)$$
$$A_4 = -(Dreieck)$$

Die Flächen A_2, A_3 und A_4 sind in den folgenden Formeln mit ihrem <u>negativen</u> Wert einzusetzen!

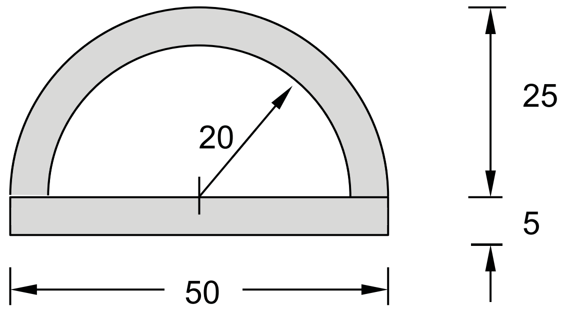
$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$\overline{y_s} = \frac{A_1 \cdot \overline{y_1} + A_2 \cdot \overline{y_2} + A_3 \cdot \overline{y_3} + A_4 \cdot \overline{y_4}}{A}$$

$$\overline{z_s} = \frac{A_1 \cdot \overline{z_1} + A_2 \cdot \overline{z_2} + A_3 \cdot \overline{z_3} + A_4 \cdot \overline{z_4}}{A}$$

Beispiel: Ermitteln Sie die Lage des Schwerpunktes:

Angaben in mm:



Flächen:

Nummer der Fläche	A_i	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$	$A_i \cdot \bar{y}_i$	$A_i \cdot \bar{z}_i$
	mm²	mm	mm	mm³	mm³
1					
2					
3					
$\sum$					

Allgemeines Vorgehen zur Schwerpunktbestimmung

Hinweis: Bei symmetrischen Querschnitten Lage nur in einer Richtung berechnen (Symmetrieachse = Ort des Schwerpunkts). Bei doppelt-symmetrischen Querschnitten ist keine Schwerpunktberechnung notwendig!

1. Bezugskoordinatensystem wählen.

2. Querschnitt in Teilflächen zerlegen.

3. Teilflächeninhalte berechnen.

4. Gesamtquerschnittsfläche berechnen.

5. Lage der SP der Teilflächen bestimmen (Tabellen).

6. Statische Momente ermitteln.

7. Lage des Gesamtschwerpunkts berechnen.

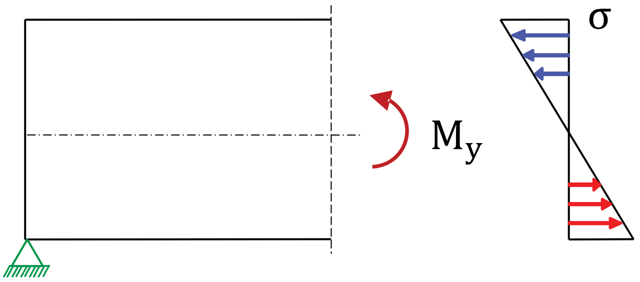
B.4 Flächenträgheitsmoment $\mathbf{I}$

4.1 Definition und Anwendungsgebiete

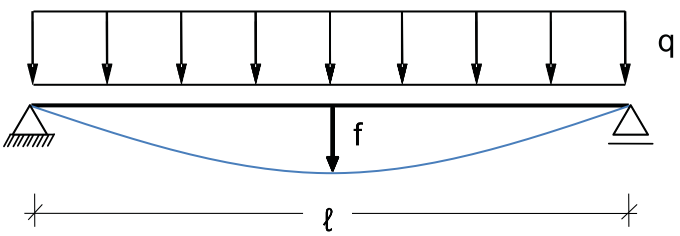
Das Flächenträgheitsmoment eines Querschnittes ist abhängig von
- der Form und Größe der untersuchten Querschnittsfläche und
- der Lage der Einzelflächen zur Bezugsachse.

Trägheitsmomente werden z. B. benötigt

- für die Berechnung der Biegespannung $\sigma_B = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$



- für die Durchbiegungsberechnung

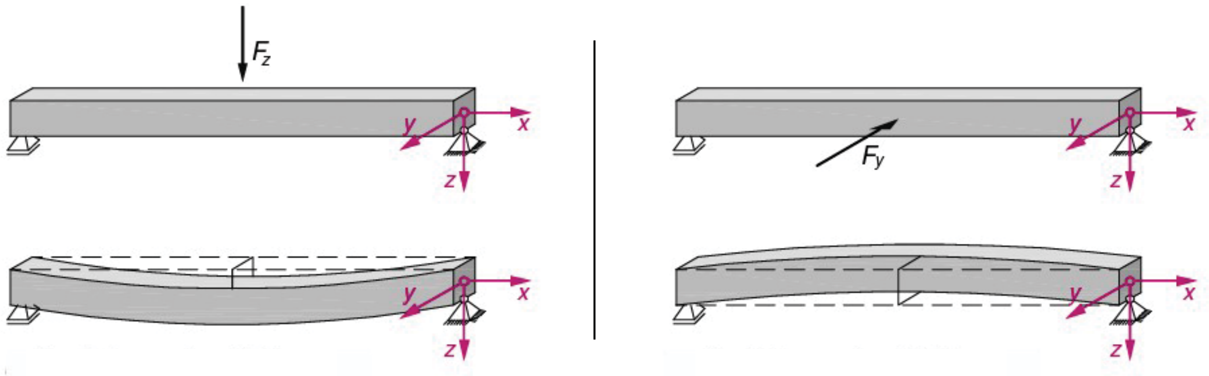


$$f = \frac{5 \cdot q \cdot \ell^4}{384 \cdot E \cdot I_y}$$

Erst mit der Kenntnis der Trägheitsmomente ist eine Aussage über die Tragfähigkeit und die Verformung eines Balkens möglich.

Trägheitsmomente haben die Einheit Länge^4 (z.B. cm^4)!

Entsprechend den Hauptachsen y und z besitzt ein Balkenquerschnitt zwei Flächenträgheitsmomente (Abb. aus Dallmann: „Baustatik 1“):



Für eine Belastung und Durchbiegung in

ist die maßgebende Kenngröße

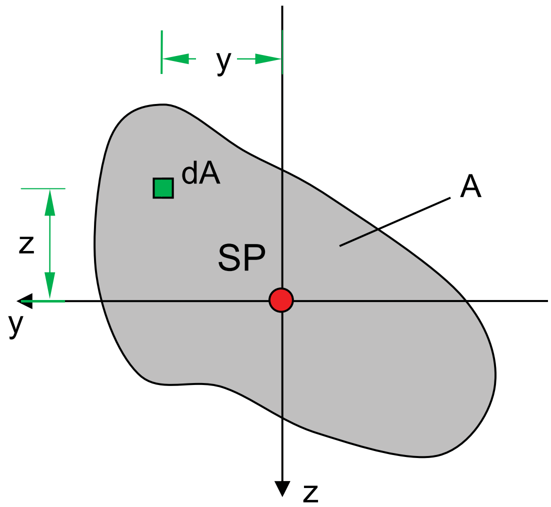
Widerstand gegen eine Verkrümmung um die

Der Index des Trägheitsmomentes passt zum jeweiligen Biegemoment:

Je größer I, desto kleiner ist die Biegeverformung eines Balkens!

4.2 Axiales Trägheitsmoment I

Prinzipiell kann man ein Trägheitsmoment auf beliebige Achsen beziehen. In der Statik beziehen wir das Trägheitsmoment jedoch immer auf die Schwerachsen!

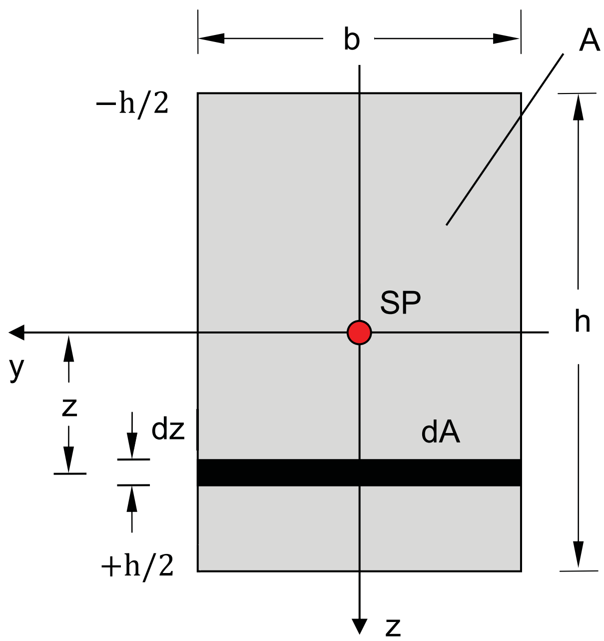


$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA$$

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA$$

Merke: Trägheitsmomente I_y und I_z haben stets positive Werte!

Beispiel Rechteckquerschnitt



$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 dy \right) dz$$

$$= \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z^2 \cdot b)\, dz = \left[\frac{b \cdot z^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$= \frac{b \cdot h^3}{3 \cdot 8} - \frac{b}{3} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Formeln für den Rechteckquerschnitt:

$$\boxed{I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12}} \qquad \boxed{I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}}$$