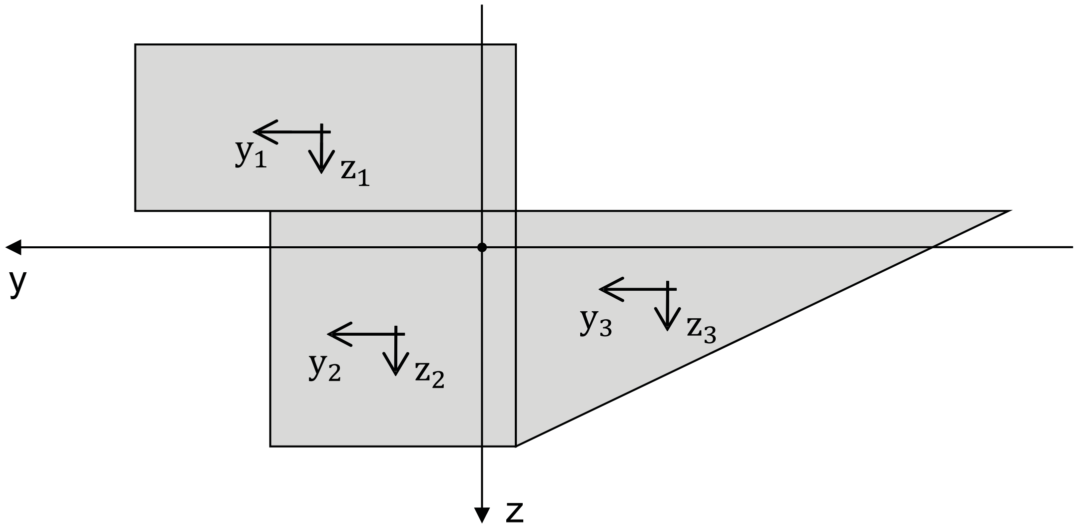
4.3 Trägheitsmoment zusammengesetzter Querschnitte – Satz von Steiner

Besteht ein Querschnitt aus mehreren Einzelflächen, muss zunächst der Schwerpunkt der Gesamtfläche ermittelt werden.

Anschließend kann, bezogen auf die Schwerachsen (y, z) das Trägheitsmoment bestimmt werden.



Es wird

$$I_y = \int_{A_{ges}} z^2 \cdot dA = \int_{A_1} z^2 \cdot dA_1 + \int_{A_2} z^2 \cdot dA_2 + \int_{A_3} z^2 \cdot dA_3$$

$$I_z = \int_{A_{ges}} y^2 \cdot dA = \int_{A_1} y^2 \cdot dA_1 + \int_{A_2} y^2 \cdot dA_2 + \int_{A_3} y^2 \cdot dA_3$$

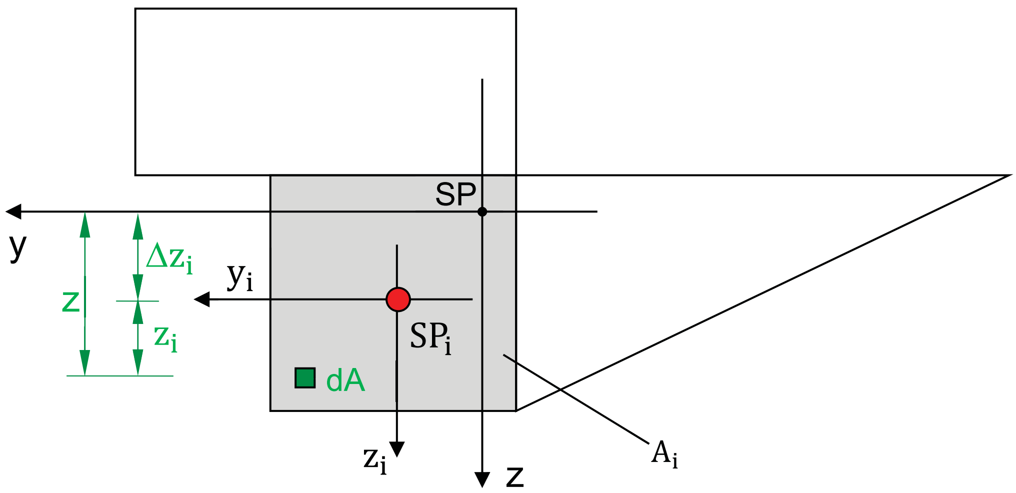
Hierbei sind die einzelnen Integrale die Trägheitsmomente der Einzelquerschnitte bezogen auf die Schwerachsen **des Gesamtquerschnittes**.

Die Einzelträgheitsmomente beinhalten also einen Anteil, welcher den Abstand der Schwerachse des Einzelquerschnittes zur Schwerachse des Gesamtquerschnittes berücksichtigt.

Die Einzelträgheitsmomente $\int_{A_1} y^2 \cdot dA_1$ oder $\int_{A_1} z^2 \cdot dA_1$ usw. werden nach dem **Satz von Steiner** bestimmt.

Der Satz von Steiner

Bestimmung des Trägheitsmoments der Teilfläche i in Bezug auf das Koordinatensystem y-z (Schwerpunkt des Gesamtquerschnitts):



Biegung um die y-Achse:

$$I_y = \int_{A_i} z^2 dA \quad \text{mit} \quad z = z_i + \Delta z_i$$

$$I_y = \int_{A_i} (z_i + \Delta z_i)^2 dA$$

$$= \int_{A_i} z_i^2 dA + \int_{A_i} 2 \cdot \Delta z_i \cdot z_i \, dA + \int_{A_i} \Delta z_i^2 dA$$

$$= \int_{A_i} z_i^2 dA \; + \; 2\Delta z_i \int_{A_i} z_i \, dA \; + \; \Delta z_i^2 \int_{A_i} dA$$

wegen $\Delta z_i = \text{konst.}$

Es ist:

$\int_{A_i} z_i^2 \, dA$ axiales Trägheitsmoment um die y_i-Achse des Teilquerschnittes i (I_{yi} = Eigenträgheitsmoment)

$\int_{A_i} z_i \, dA$ statisches Moment um die Schwerachse y_i des Teilquerschnittes i ($S_{yi} = 0$)

$\int_{A_i} dA$ Flächeninhalt des Teilquerschnittes i

Damit wird $\boxed{I_y = I_{y_i} + A_i \cdot \Delta z_i^2}$

In gleicher Weise erhält man für die z-Achse: $\boxed{I_z = I_{z_i} + A_i \cdot \Delta y_i^2}$

Der **Satz von Steiner** in Worten:

Das Trägheitsmoment einer Fläche um eine beliebige Achse ist gleich dem Trägheitsmoment um die parallele Schwerachse, vermehrt um das Produkt aus Fläche und dem Quadrat des Abstandes der beiden Achsen.

Um nun das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Querschnitts zu berechnen müssen die Eigenträgheitsmomente und Steineranteile aller Teilflächen aufsummiert werden.

Allgemeines Vorgehen zur Ermittlung von Trägheitsmomenten zusammengesetzter Querschnitte

1. Lage des Schwerpunktes bestimmen

2. Achsenkreuz y und z durch den Schwerpunkt legen.
   (Alle Achsen der Einzelquerschnitte müssen parallel zu den Achsen y und z sein).

3. Eigenträgheitsmomente der Einzelflächen errechnen (mit Formelsammlung).

4. Abstände der Schwerpunkte der Einzelquerschnitte Δy_i und Δz_i von den Schwerachsen bestimmen.

5. “Steiner”-Anteile bestimmen.

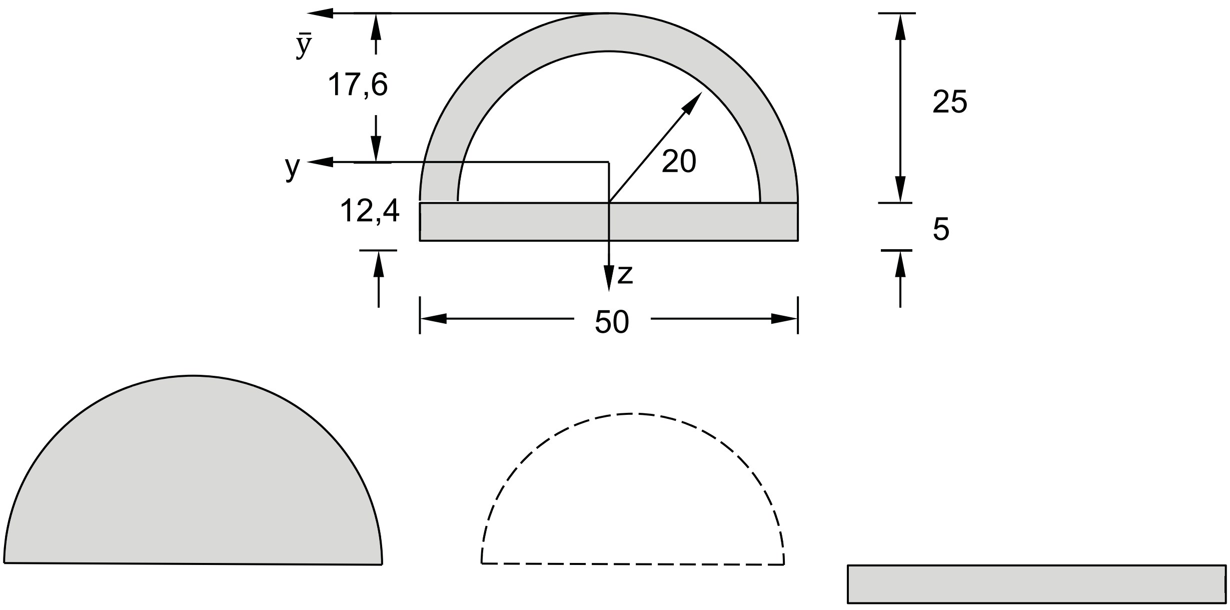
6. Trägheitsmomente I_y und I_z als Summe der Eigenträgheitsmomente und Steiner-Anteile berechnen

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} I_{y_i} + \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \Delta z_i^2$$

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} I_{z_i} + \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \Delta y_i^2$$

Dieses Schema kann auch sehr gut mit einem Tabellenkalkulationsprogramm berechnet werden. Siehe hierzu die Datei *Traegheitsmomente.xls* in der Community.

Beispiel: Stahl-Querschnitt für einen Handlauf



	A_i mm²	$\bar{z}_i$ mm	Δz_i mm	$A_i \cdot \Delta z_i^2$ mm^4	I_{yi} mm^4	I_{zi} mm^4
1	982	14,4				
2	-628	16,5				
3	250	27,5				
$\sum$	**604**					

B.4.4 Widerstandsmoment

Widerstandsmomente werden zur Ermittlung der Randspannungen eines Querschnittes benützt.

Allgemein gilt für die Biegespannungen in einem Querschnitt:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \qquad\qquad \sigma = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

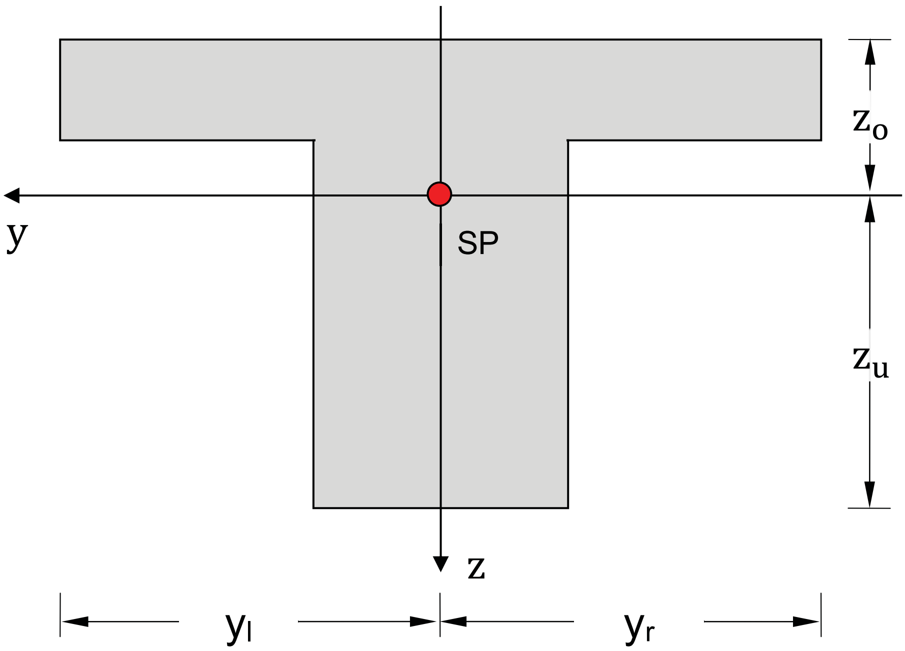
Die größte Biegespannung max σ tritt am Rand auf, also wenn y bzw. z maximal sind:

$$\max \sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max} \qquad\qquad \max \sigma = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y_{max}$$

$$\text{Definition: } W_y = \frac{I_y}{z_{max}} \qquad\qquad W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$$

$$\max \sigma = \frac{M_y}{W_y} \qquad\qquad \max \sigma = -\frac{M_z}{W_z}$$

Das Widerstandsmoment ermöglicht also eine geringfügig abgekürzte Schreibweise bei der Spannungsberechnung. Bezogen auf die Hauptachsen besitzt jeder Querschnitt 4 Widerstandsmomente:



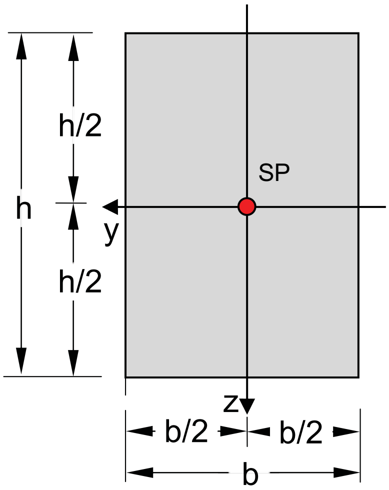
$$W_{y_o} = \frac{I_y}{z_o}$$

$$W_{y_u} = \frac{I_y}{z_u}$$

$$W_{z_l} = \frac{I_z}{y_l}$$

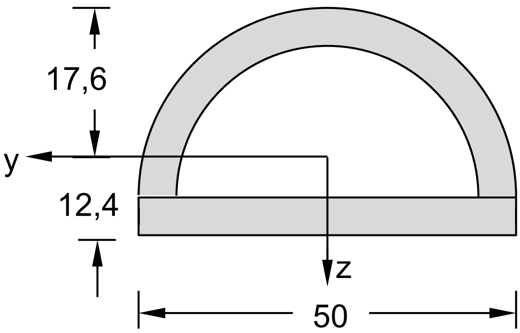
$$W_{z_r} = \frac{I_z}{y_r}$$

Widerstandsmoment für Rechteckquerschnitte



$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12}$$

Beispiel



I_y = 59687 mm^4

Berechnen Sie die Widerstandsmomente W_{yo} und W_{yu}.

Wo treten bei Biegung um die y-Achse die größten Spannungen auf?