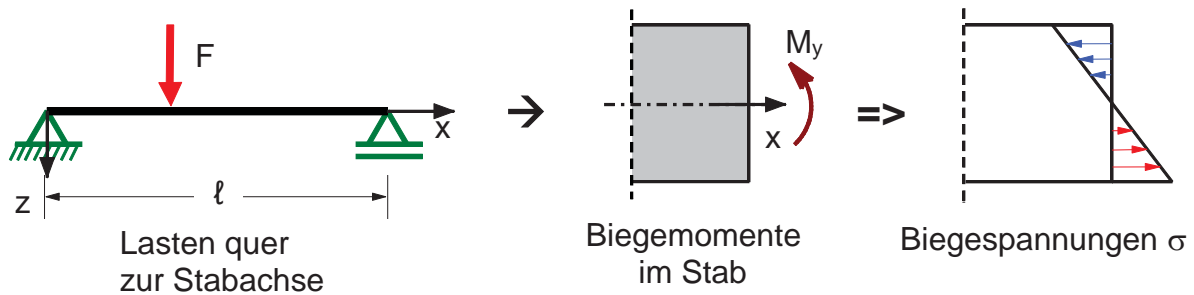


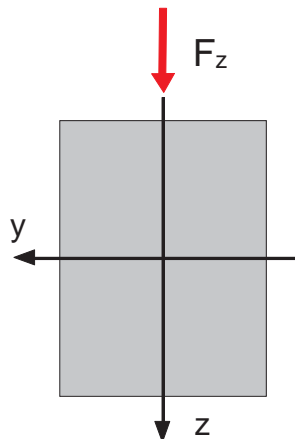
B.5.3 Biegenormalspannungen

5.3.1 Grundlagen und einfache Biegung

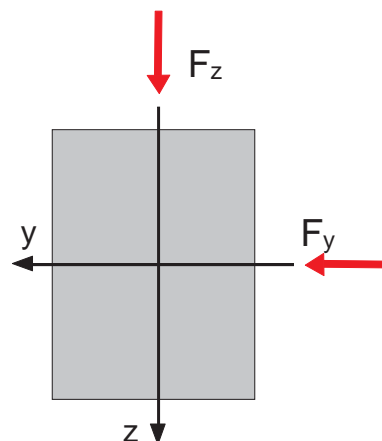
Biegespannungen entstehen in einem Querschnitt durch Biegemomente. Es handelt sich dabei ebenso wie beim einachsigen Spannungszustand um Normalspannungen, d.h. Spannungen, die senkrecht zum Querschnitt wirken.



Entsprechend der äußeren Beanspruchung erfährt ein Stab eine einachsige bzw. einfache Biegung.



oder eine zweiachsige, schiefe Biegung bzw. Doppelbiegung



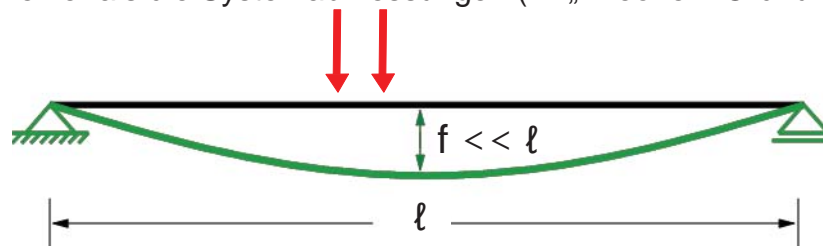
Für die „**Technische Biegetheorie**“ müssen im Wesentlichen folgende **Voraussetzungen** getroffen werden:

1. **Geometrie:**

Die Höhe und die Breite des Balkens sind deutlicher kleiner als seine Länge
→ $b, h < \ell / 4$

2. **Verformungen:**

Die aus der Belastung resultierenden Durchbiegungen und Winkeländerungen sind so klein, dass sie keinen Einfluss auf den Gleichgewichtszustand haben, d.h. viel kleiner als die Systemabmessungen (→ „Theorie I. Ordnung“).



3. **Material:**

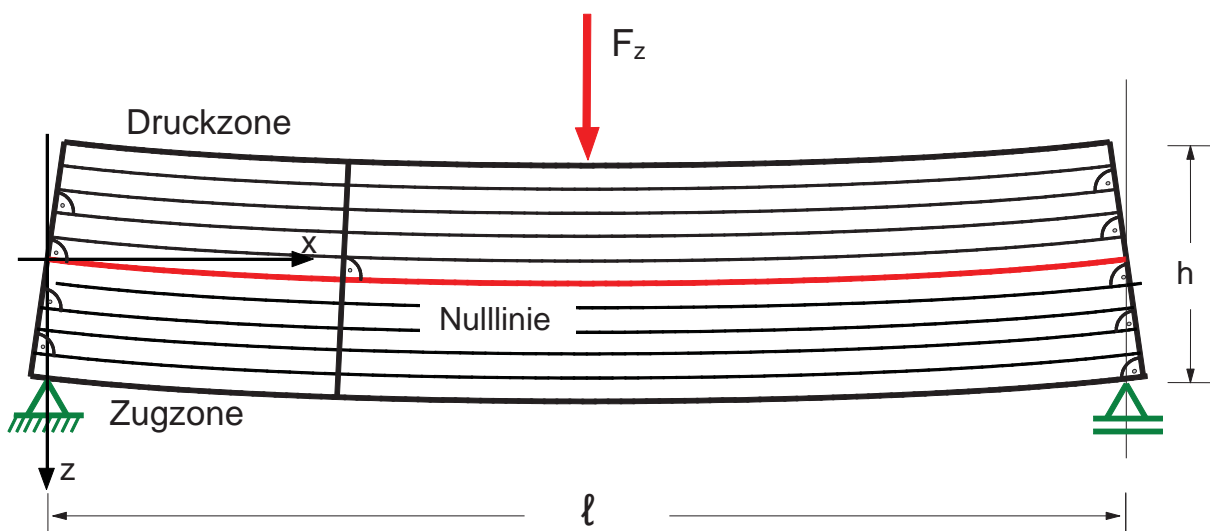
Die Spannungen verändern sich linear mit dem Abstand von der Nulllinie. Es gilt das Hooke'sche Gesetz. Der Baustoff ist homogen.

4. **Ebenbleiben der Querschnitte**

Ursprünglich ebene Querschnitte bleiben auch nach der Durchbiegung eben, sie verdrehen sich nur. (Hypothese von Bernoulli und Navier).

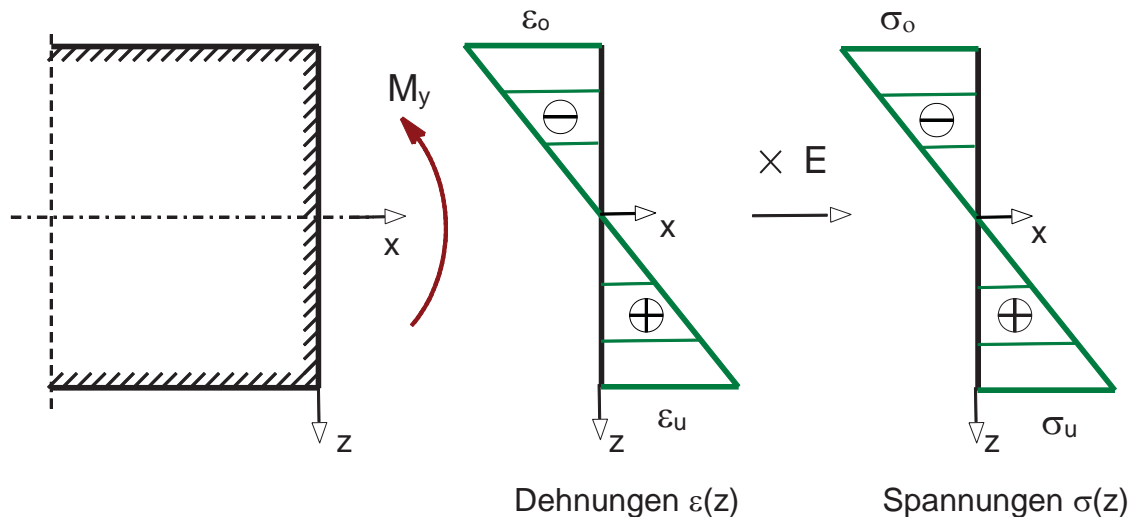
5. **Vernachlässigung der Schubverformungen**

Die Querschnitte stehen auch im verformten Zustand senkrecht zur Stabachse (Normalenhypothese von Bernoulli). Das bedeutet gleichzeitig, dass Schubverformungen unberücksichtigt bleiben.



Herleitung der Biegespannungen

Entsprechend der Proportionalität zwischen Spannungen und Dehnungen erhält man bei einer Biegemomentenbeanspruchung folgenden Dehnungs- und Spannungsverlauf über die Querschnittshöhe. Die Spannungen sind proportional zu den Dehnungen, skaliert mit dem E-Modul des Materials (Hooke'sches Gesetz $\sigma = E \cdot \epsilon$).



Für den Verlauf der Spannungen über die Höhe kann man eine Geradengleichung aufstellen:

$$\sigma(z) = c \cdot z$$

Die zunächst unbekannte Steigung c der Geraden erhält man aus der Bedingung, dass die resultierende Drehwirkung der Spannungen dem Biegemoment M_y entsprechen muss. Der Hebelarm der Spannungen entspricht dabei dem Schwerpunktsabstand z :

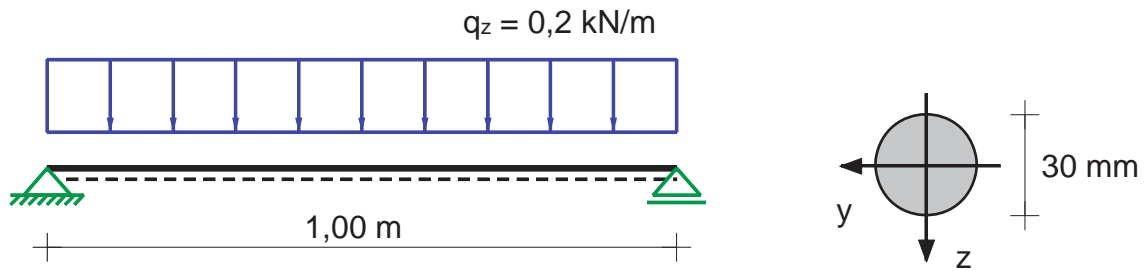
$$M_y = \int_A \sigma(z) \cdot z \, dA$$

$$M_y = \int_A c \cdot z \cdot z \, dA = c \int_A z^2 \, dA \quad \Rightarrow \quad c = \frac{M_y}{I_y}$$

Damit ergibt sich die Formel für die Berechnung der Biegespannung:

$$\sigma(z) = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

Beispiel 1: Kleiderstange:



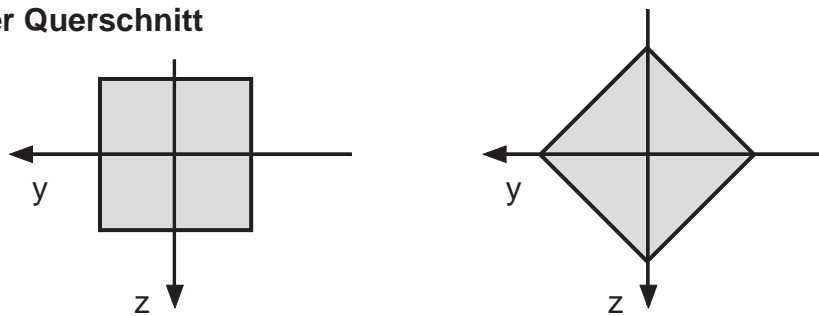
$\max M_y =$

$I_y =$

$\sigma_o =$

$\sigma_u =$

Beispiel 2: Gedrehter Querschnitt



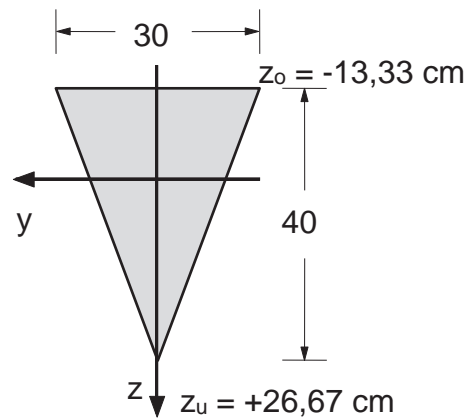
$M_y = 1 \text{ kNm} = 100 \text{ kNcm}$

Aus Tabellen:

Beispiel 3: Dreiecksquerschnitt

$$\max M_y = 20 \text{ kNm}$$

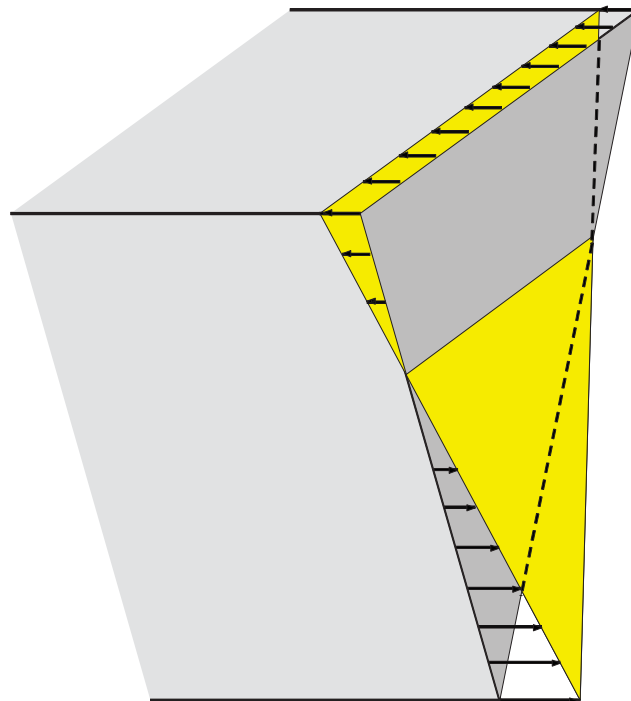
$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{36} = \frac{30 \cdot 40^3}{36} = 53333 \text{ cm}^4$$



Spannungen im Querschnitt

$$\sigma_o = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_o =$$

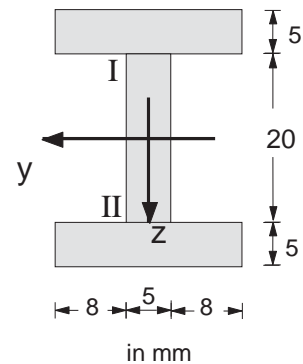
$$\sigma_u = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_u =$$



Beispiel 4: Doppel-T-Querschnitt

$$M_y = 0,3 \text{ kNm} = 300.000 \text{ Nmm}$$

$$I_y = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12} = \frac{21 \cdot 30^3 - (8+8) \cdot 20^3}{12} = 36583 \text{ mm}^4$$



Spannungen $\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$

$$\sigma_o = \frac{300000}{36583} \cdot (-15) = -123 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_u = \frac{300000}{36583} \cdot (+15) = +123 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_I = \frac{300000}{36583} \cdot (-10) = -82 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{II} = \frac{300000}{36583} \cdot (+10) = +82 \text{ N/mm}^2$$

Spannungsverlauf

