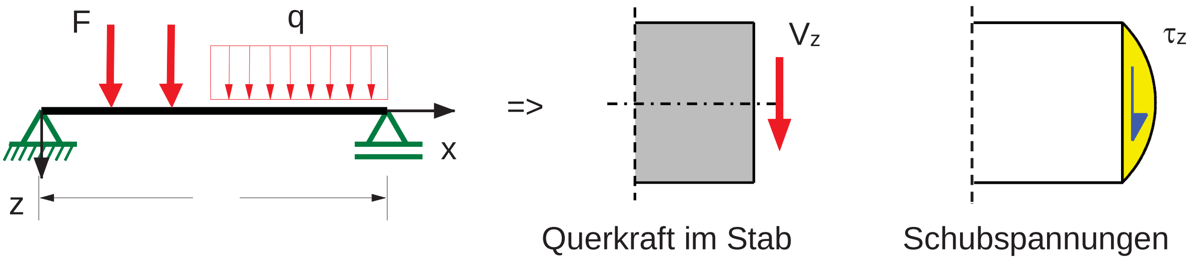
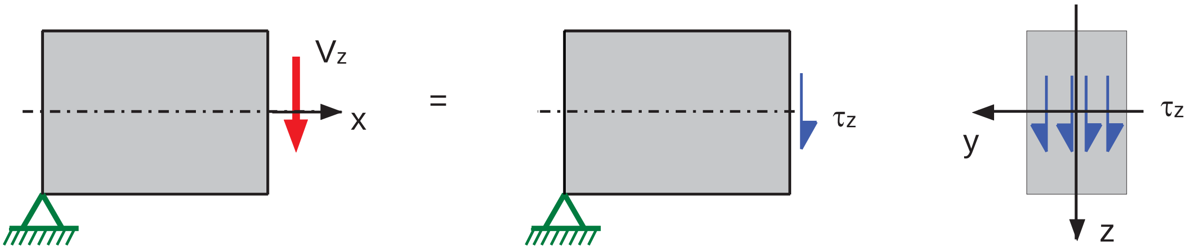
B.5.4 Schubspannungen

5.4.1 Allgemeines

Die Querkraft bewirkt Schubspannungen in Richtung der Querkraft (τ_z).

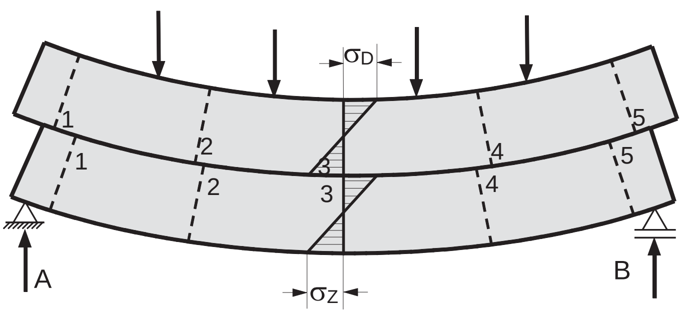


Diese Schubspannungen wirken parallel zur geschnittenen Fläche



Schubspannungen treten jedoch auch in einer zweiten Art auf, nämlich in Schnitten parallel zur x-Achse. Dies kann anhand des folgenden Beispiels veranschaulicht werden. Zwei Balken werden aufeinandergelegt. In einem Fall liegen sie lose aufeinander, im anderen Fall sind sie starr verbunden (z.B. verleimt). Aus der Anschauung weiß man, dass das Tragverhalten jeweils anders ist:

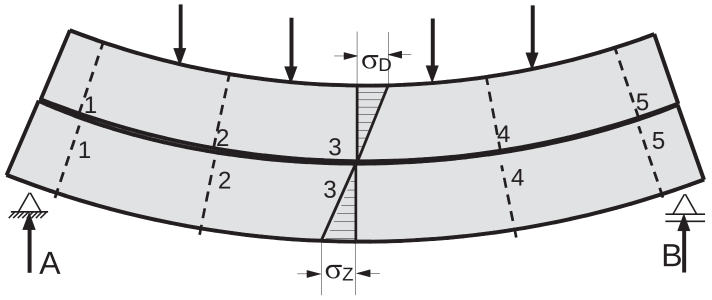
Lose aufeinandergelegte Balken (kein Verbund, reibungsfrei):



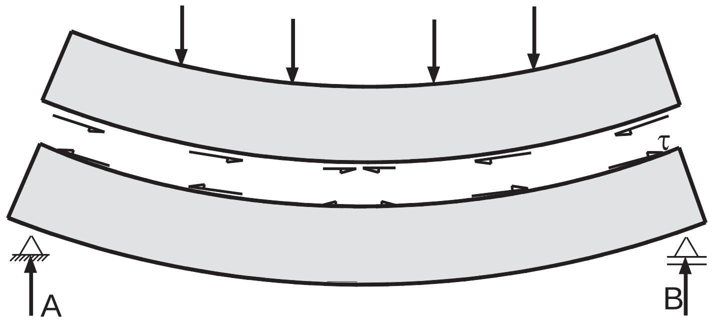
Jeder Balken trägt die halbe Last.

Zwischen den Balken werden außer dem Druck in der Fuge keine Kräfte übertragen.

Starr verbundene Balken (oder ganzer Querschnitt):

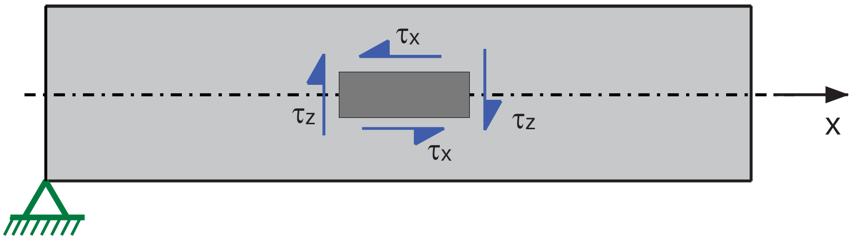


Das System reagiert steifer und ist tragfähiger. Zwischen den Balken werden nun auch Schubspannungen übertragen, welche die gegenseitige Verschiebung verhindern.

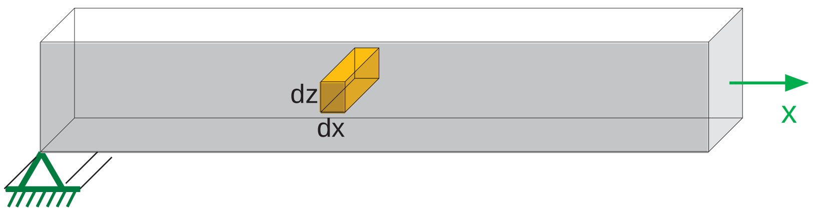


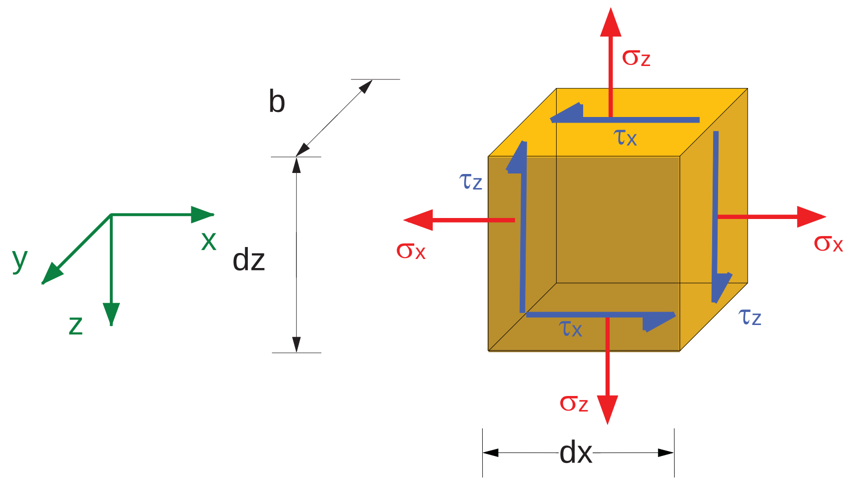
Schubspannungen in der Fuge

Denkt man sich den Träger aus Lamellen zusammengesetzt, will sich jede Lamelle relativ zu den anderen Lamellen verschieben.
Bei ungeteilten Trägern oder verleimten Lamellen ist eine solche Verschiebung nicht möglich. D.h. hier müssen Verbundspannungen wirken, die eine solche Verschiebung verhindern. Es wirken also auch horizontale Schubspannungen τ_x.



Betrachtet man einen Balken und schneidet aus dem Träger einen unendlich kleinen Quader dx·dz heraus, wirken an diesem Quader die Schubspannungen τ_x und τ_z.
Man kann beweisen, dass die Spannungen τ_x und τ_z gleich groß sein müssen:





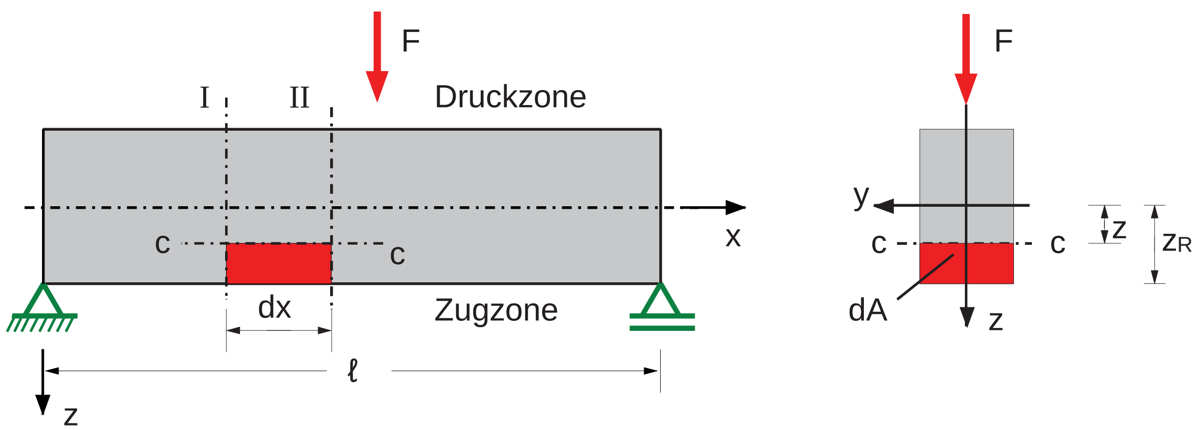
$$\sum M_y = 0 \quad \tau_x \cdot \underbrace{b \cdot dx}_{dA_z} \cdot dz - \tau_z \cdot \underbrace{b \cdot dz}_{dA_x} \cdot dx = 0$$

$$\tau_x = \tau_z \cdot \frac{b \cdot dz \cdot dx}{b \cdot dz \cdot dx} \qquad \boxed{\Rightarrow \quad \tau_x = \tau_z}$$

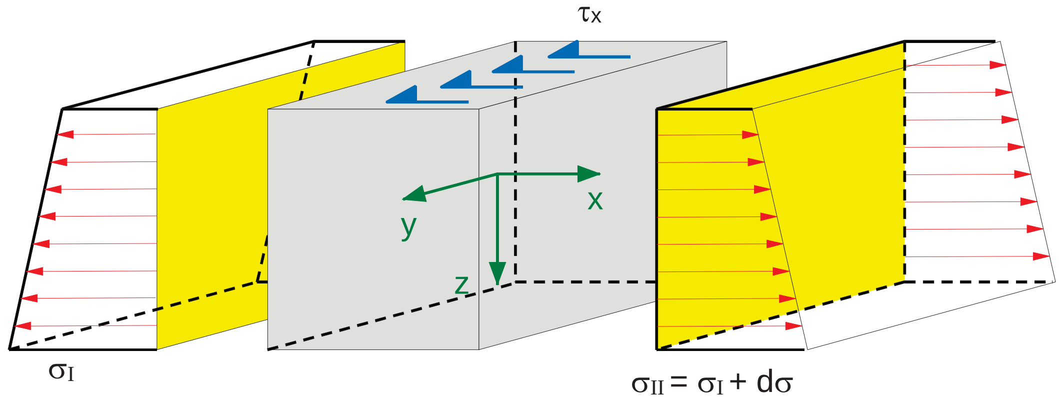
Man muss demzufolge zur Ermittlung der Schubspannung an einer Stelle im Balken nur die vertikale oder die horizontale Schubspannung berechnen. Tatsächlich lässt sich nur für die horizontale Schubspannung τ_x eine Formel ableiten.

5.4.2 Schubspannungsformel „Vorsicht Bruch“

Zur Ermittlung der Größe der Schubspannungen τ_x wird ein Quader auf der Unterseite des Balkens betrachtet:



Am unteren Rand des Trägers muss die Schubspannung $\tau_x = 0$ sein, da an einer freien Oberfläche keine Spannungen wirken können (außer es wären äußere Lasten an dieser Stelle vorhanden). Wegen der “Gleichheit zugeordneter Schubspannungen”, die oben bewiesen wurde, muss am Rand auch $\tau_z = 0$ sein.



Aus dem Gleichgewicht dieses Trägerteils $\Sigma H = 0$ kann man nun eine Formel für die Berechnung von Schubspannungen τ_x auf der Oberseite des Quaders ableiten. Diese Formel für $\tau_x = \tau_z$, die hier ohne Herleitung angegeben wird, lautet:

$$\boxed{\tau = \frac{V_z \cdot S_{y,A}}{I_y \cdot b}}$$

"**V**or**SI**cht **B**ruch" - Formel

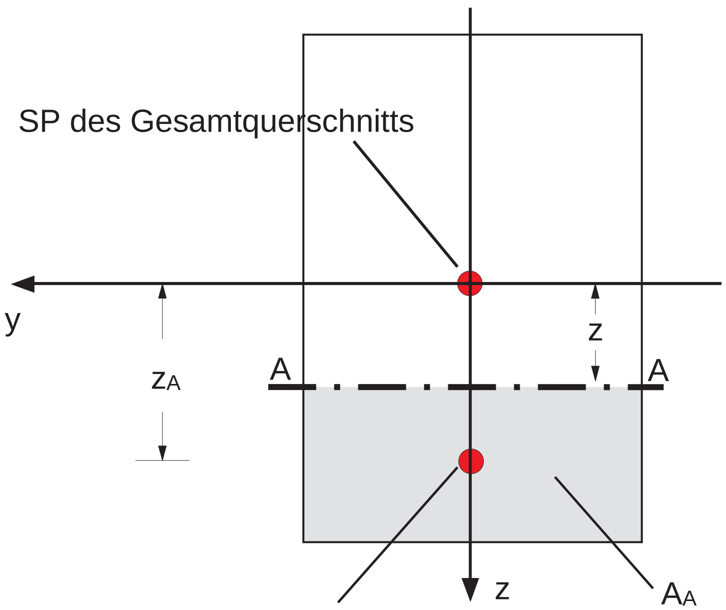
V_z: Querkraft im untersuchten Schnitt
I_y: Flächenträgheitsmoment
$S_{y,A}$: Statisches Moment des „abgeschnittenen" Querschnittsteils um die y-Schwerachse ($S_{y,A} = A_A \cdot z_A$),
b: Breite des Querschnitts an der betrachteten Stelle

Mit dieser Formel können für beliebige Querschnittsformen an beliebigen Stellen im Querschnitt die Schubspannungen berechnet werden.

In der Regel interessieren nur die Maximalwerte. Im Normalfall, d.h. wenn sich der Querschnitt über die Länge des Balkens nicht ändert, ist die betragsmäßig größte Querkraft (i.d.R. am Auflager) maßgebend. Im Querschnitt entsteht die maximale Schubspannung dort, wo $S_{y,A}/b$ maximal wird. Dies ist i.d.R. der Querschnittsschwerpunkt. Ausnahme: Wenn sich die (wirksame) Breite stark ändert (z.B. durch ein Loch), kann auch die Stelle mit der geringsten Breite maßgebend sein.

5.4.3 Statisches Moment von Querschnittsteilen $S_{y,A}$

Für die Schubspannungsformel muss man für einen “abgeschnittenen” Querschnittsteil das statische Moment $S_{y,A}$ bezogen auf die Schwerachsen des Querschnittes bestimmen.
Wenn man auf Höhe des Schnittes A-A die Schubspannungen berechnen will, benötigt man das statische Moment für den Querschnittsteil darunter:



Statisches Moment der abgeschnittenen Querschnittsfläche A_A bezogen auf die Schwerachse y:

$$S_{y,A} = A_A \cdot z_A$$

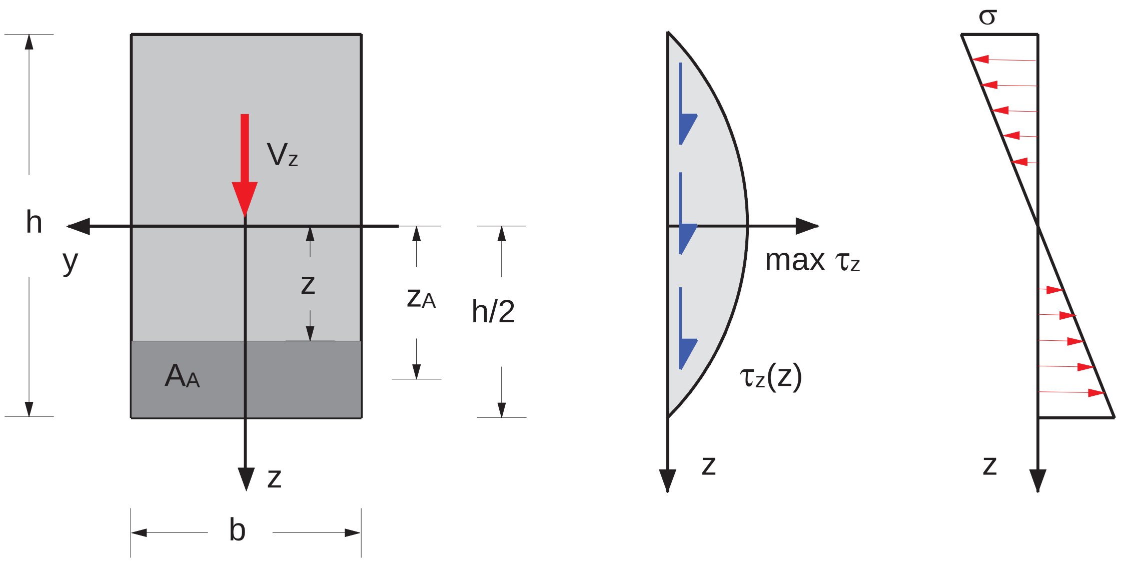
A_A: abgeschnittene Querschnittsfläche a·b
z_A: Schwerpunktabstand der abgeschnittenen Querschnittsfläche von der Bezugsachse y

Regel:
Das statische Moment der abgeschnittenen Querschnittsfläche ergibt sich aus dem Produkt

“abgeschnittene Querschnittsfläche”	mal	“Abstand Schwerpunkt der abgeschnittenen Fläche A_A zur gesamten Querschnittsfläche”.

Ggf. sind bei komplizierteren oder zusammengesetzten Querschnitten auch hierbei mehrere Teilquerschnitte zu summieren.

5.4.4 Spezialfall Rechteckquerschnitt



a) Schubspannungen in beliebiger Höhe z

$$S_{y,A} = A_A \cdot z_A$$

$$A_A = b \cdot \left(\frac{h}{2} - z\right)$$

$$z_A = z + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - z\right)$$

$$S_{y,A} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - z\right) \cdot \left[z + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - z\right)\right] = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

$$\tau_z = \frac{V_z \cdot S_{y,A}}{I_y \cdot b} = \frac{V_z \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot b}$$

$$\boxed{\tau_z = \frac{3}{2} \cdot \frac{V_z}{b \cdot h} \cdot \left[1 - \left(\frac{2 \cdot z}{h}\right)^2\right]}$$

b) Schubspannungen am oberen bzw. unteren Rand

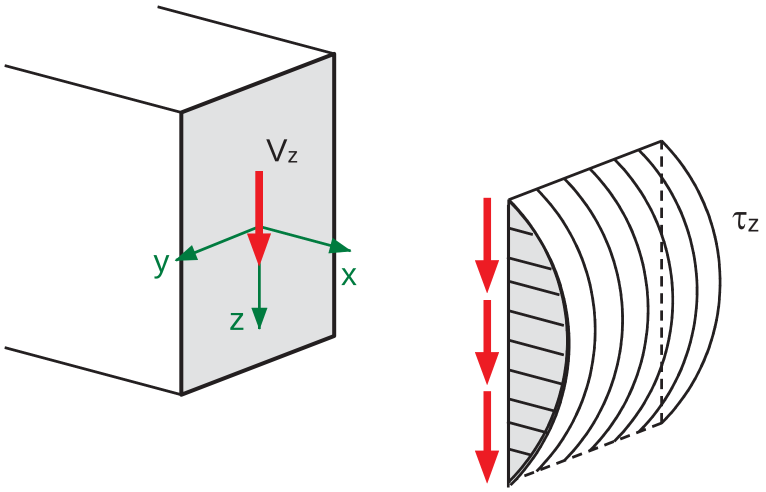
$$\tau_z = \frac{3}{2}\frac{V_z}{b \cdot h}\left[1 - \left(\frac{2 \cdot \frac{h}{2}}{h}\right)^2\right] = 0$$

c) Maximale Schubspannungen im Schwerpunkt bei z = 0

$$\boxed{\max \tau_z = \frac{3}{2}\frac{V_z}{b \cdot h} = 1{,}5\,\frac{V_z}{A}}$$

Spezialformel für Rechteckquerschnitte!

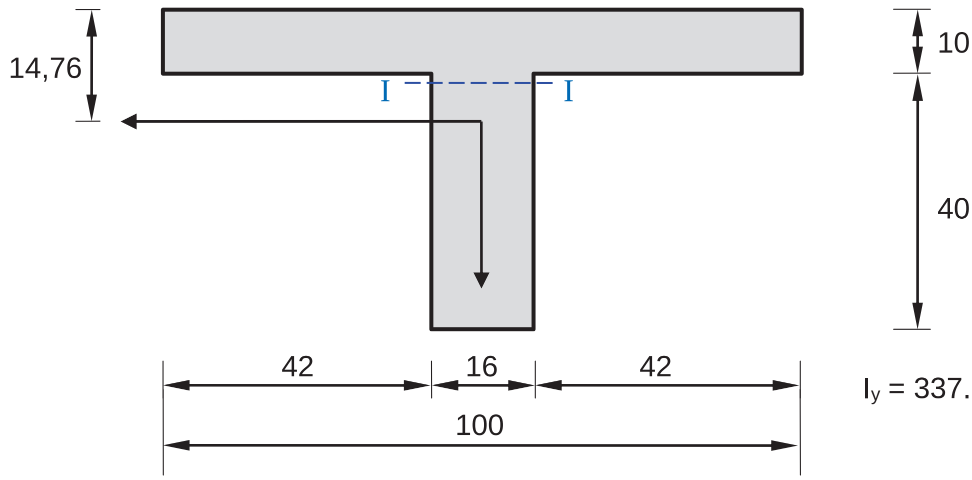
Der Schubspannungsverlauf hat beim Rechteckquerschnitt die Funktion einer quadratischen Parabel:



Merke: Schubspannungen nehmen Extremwerte an
- in der Regel auf Höhe des Schwerpunkts (Maximum von $S_{y,A}$)
- in Ausnahmefällen an schmalen Stellen des Querschnitts (Minimum von b), wenn die Breite variabel ist oder Löcher / Aussparungen vorhanden sind.

Wenn zwei Balken mit Dübeln, Schrauben oder Nägeln zu einem tragenden Gesamtquerschnitt verbunden werden, müssen die Verbindungsmittel die Schubkräfte, die beim Gesamtquerschnitt in der Fuge auftreten würden, aufnehmen können.
Die Kraft je Verbindungsmittel ergibt sich dabei aus der Schubspannung multipliziert mit der gedachten Klebefläche, die durch das Verbindungsmittel ersetzt wird.

Beispiel Schubspannungsberechnung (vgl. Wiederholungsaufgabe zu Teil B)

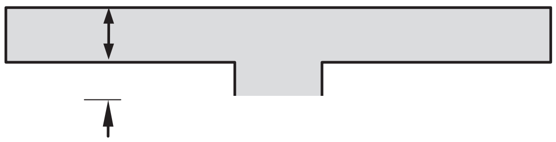


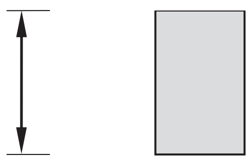
$I_y = 337.569\ mm^4$

Gesucht:

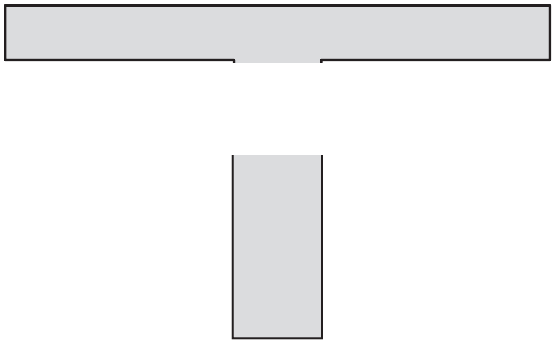
a) Max. Schubspannung infolge V_z = 2 kN
b) Schubspannung im Schnitt I-I
c) Schubspannung in der Schweißnaht, wenn der Querschnitt im Schnitt I-I über eine Doppelkehlnaht a = 5 mm verbunden ist?
d) Scherkraft in den Schrauben, wenn im Schnitt I-I alle 50 mm eine Schraube als Verbindung vorgesehen ist.

a) Schubspannung im Schwerpunkt:

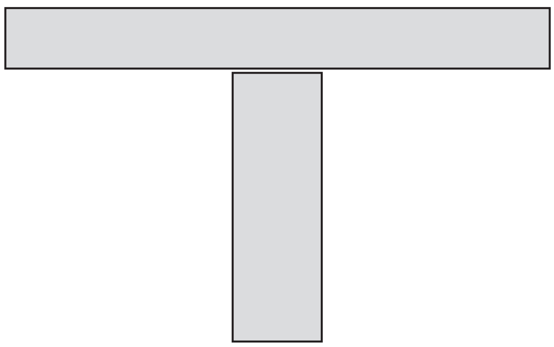




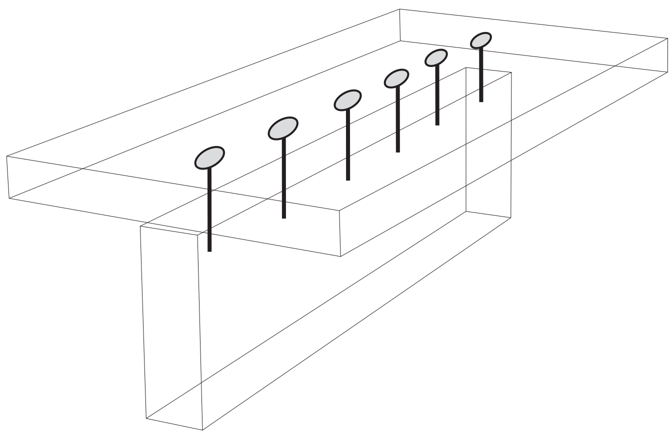
b) Schubspannung im Schnitt I-I:



c) Schweißnaht im Schnitt I-I:



d) Schrauben im Schnitt I-I:



Anmerkung: **Die Schubspannung bzw. Schubkraft folgt dem Verlauf der Querkraft. → Die Beanspruchung ist maximal am Auflager**