C. Verformungen

C.1 Allgemeines

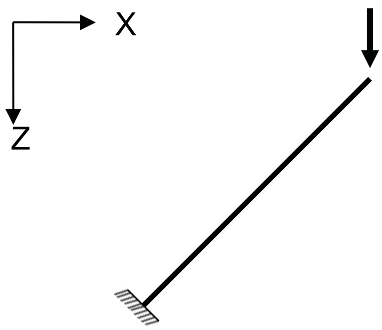
Durch Kräfte und durch Temperatur- oder Feuchteänderungen entstehen Verformungen. Werden die Verformungen zu groß, besteht die Gefahr, dass das Bauteil unbrauchbar wird. Man spricht vom **Nachweis der "Gebrauchstauglichkeit"**.

Für die Berechnung wird i.d.R. die Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes vorausgesetzt:

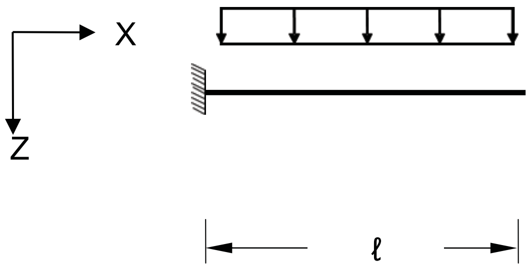
Hinsichtlich der Formänderung wird unterschieden in

- **Dehnung** ε durch Normalkräften (⟶ Längenänderung)
- **Krümmung** κ infolge von Momenten (⟶ Biegung)
- **Gleitung** γ infolge von Querkräften (⟶ Schubverformung)

Aus den Formänderungen entstehen Verformungen (Verschiebungen, Verdrehungen):

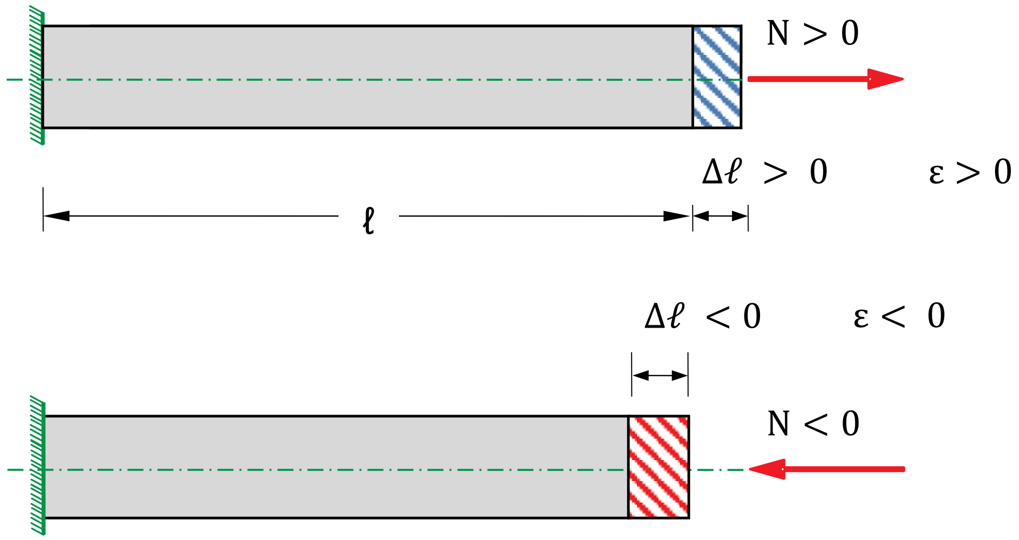


In der Praxis genügt meist die „Theorie I. Ordnung" = Statik kleiner Verformungen (vgl. Voraussetzungen der Balkentheorie in Teil B):



C.2 Längenänderungen infolge von Normalkräften

Wirkt auf einen Stab mit der Länge ℓ eine Normalkraft, wird sich dieser Stab in Richtung der Normalkraft verformen.



Das Verhältnis der Längenänderung Δℓ zur ursprünglichen Länge ℓ eines Bauteils bezeichnet man als Dehnung ε.

$$\text{Dehnung } \varepsilon = \frac{\text{Verlängerung}}{\text{ursprüngliche Länge}} = \frac{\Delta\ell}{\ell} \quad \text{oft in } \frac{mm}{m} \text{ oder ‰}$$

Die Dehnung ε gibt die Längenänderung je Längeneinheit an. Da sich hierbei die Einheit kürzt, haben Dehnungen keine Einheit. Es ist auch üblich, Dehnungen in mm je m (= Promille) bzw. in cm je m (= Prozent) anzugeben.

Die Dehnung ε ist bei Verlängerungen positiv (+), bei Verkürzungen negativ (-). Negative Dehnungen werden auch als "Stauchungen" bezeichnet.

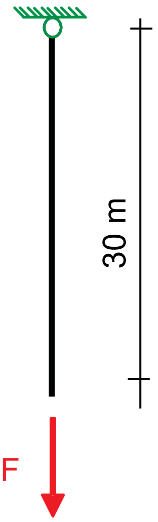
Wird ein Stab durch eine Normalkraft beansprucht, ergibt sich seine Längenänderung mit Hilfe des Hooke´schen Gesetzes:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\rightarrow \quad \Delta\ell = \varepsilon \cdot \ell = \frac{\sigma \cdot \ell}{E} \qquad \text{mit} \quad \sigma = \frac{N}{A} \quad \text{wird}$$

Dabei wird E·A als Dehnsteifigkeit des Stabes bezeichnet.

Beispiel 1: Bungee-Seil (Ruhezustand)



$F = 1\ \mathrm{kN}$ $\quad\quad \ell = 30\ \mathrm{m}$

$A = 3\ \mathrm{cm}^2$ $\quad\quad E = 5\mathrm{kN/cm}^2$

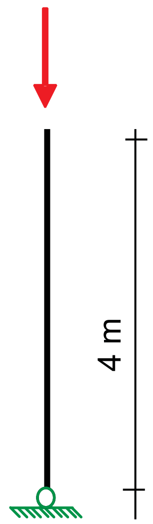
Längenänderung und Dehnung des Stabes

$$\Delta\ell = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Verlängerung des Seils $\Delta\ell =$

ACHTUNG! Diese Berechnung ist für ein Bungee-Seil leider nicht ausreichend, da sie nur die Verlängerung im Ruhezustand beschreibt. In Realität spielt die dynamische Kraftkomponente die entscheidendere Rolle, die Verlängerung ist also erheblich größer!

Beispiel 2: Abschätzung der Stützenstauchung in den unteren Geschossen eines Hochhauses in Stahlskelettbauweise.



Nach dem Einbau der Stütze im Erdgeschoss wird die Stütze durch die Last aus den oberen Geschossen belastet. Die Spannungserhöhung bis zur Fertigstellung des Gebäudes beträgt geschätzt

$$\Delta\sigma \cong$$

Die Dehnungsänderung beträgt

$$\Delta\varepsilon =$$

Hieraus ergibt sich eine Verkürzung von

$$\Delta\ell =$$

C.3 Die Biegelinie am Beispiel des statisch bestimmten Einfeldträgers unter Gleichlast

C.3.1 Voraussetzungen

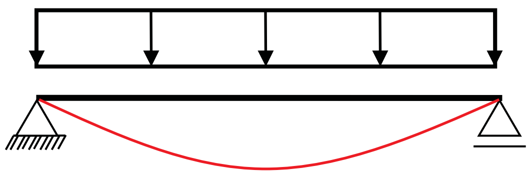
Siehe auch Teil B, Kap. 5

Die wichtigsten Voraussetzungen sind:

- kleine Verschiebungen
- Hooke'sches Gesetz

C.3.2 Überblick der Herleitung

Gesucht ist die Funktion der Biegelinie des Einfeldträgers unter Gleichlast:



Durchbiegung → Krümmung → Dehnung → Spannung → M → q

C.3.3 Bausteine der Herleitung

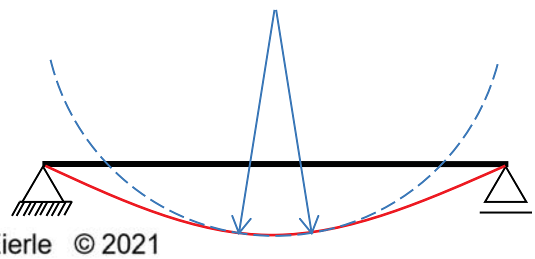
Baustein ①: Durchbiegung → Krümmung

Die 2. Ableitung der Biegelinie ist w''(x)

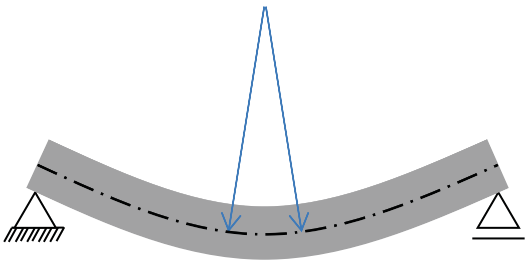
Die Krümmung κ einer Kurve ist mathematisch exakt:

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{-w''}{(1 + w'^2)^{3/2}}$$

Für w' → 0 geht κ →



Baustein ②: Krümmung → Dehnung



Baustein ③: Dehnung → Spannung

Baustein ④: Spannung → Biegemoment

Baustein ⑤: Biegemoment → Belastung

Aus Teil A ist bekannt (Gleichgewicht am Balkenelement):

$$M' = V$$

$$V' = -q$$

C.3.4 Zusammenfassung der Gleichungen

Bausteine ① und ②:

Bausteine ③ und ④:

→

Mit Baustein ⑤:

C.3.5 Lösung der Differentialgleichung

$$w''''(x) = \frac{q}{EI}$$

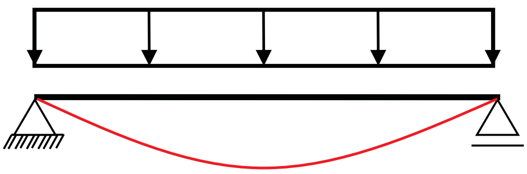
$$w'''(x) = \int w''''dx = \frac{q}{EI}x + C_1$$

$$w''(x) = \int w'''\,dx = \frac{q}{EI}\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

$$w'(x) = \int w''\,dx = \frac{q}{EI}\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

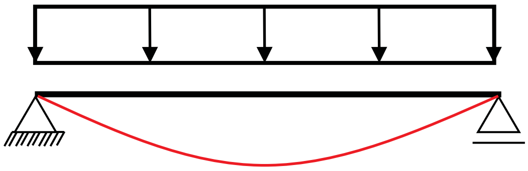
$$w(x) = \int w'\,dx = \frac{q}{EI}\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4$$

C.3.6 Randbedingungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten



C.3.7 Zusammenfassung

1. Problem:



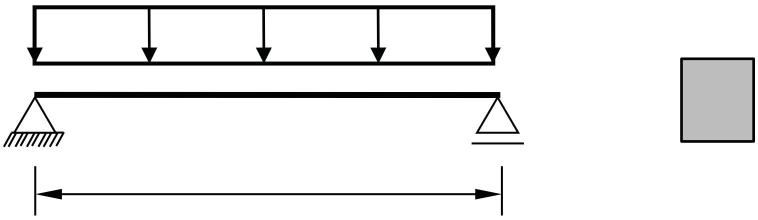
2. DGL: $$w''''(x) = \frac{q}{EI}$$

3. Lösung durch Integration: $$w(x) = \frac{q}{EI}\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

4. Randbedingungen einbauen: $$w(x) = \frac{q}{EI}\left(\frac{1}{24}x^4 - \frac{\ell}{12}x^3 + \frac{\ell^3}{24}x\right)$$

5. Maximalwert: $$w(\ell/2) = \frac{q}{EI}\left(\frac{1}{24}\left(\frac{\ell}{2}\right)^4 - \frac{\ell}{12}\left(\frac{\ell}{2}\right)^3 + \frac{\ell^3}{24}\left(\frac{\ell}{2}\right)\right) =$$

C.3.8 Beispiel: Schaumstoffbalken unter Eigengewicht



Belastung: Eigengewicht

Trägheitsmoment:

E-Modul:

max w =