E Stabilitätsprobleme

E.1 Knicken

Bauteile, die auf Druck beansprucht sind, können durch zwei Ursachen versagen, die voneinander unabhängig sind:

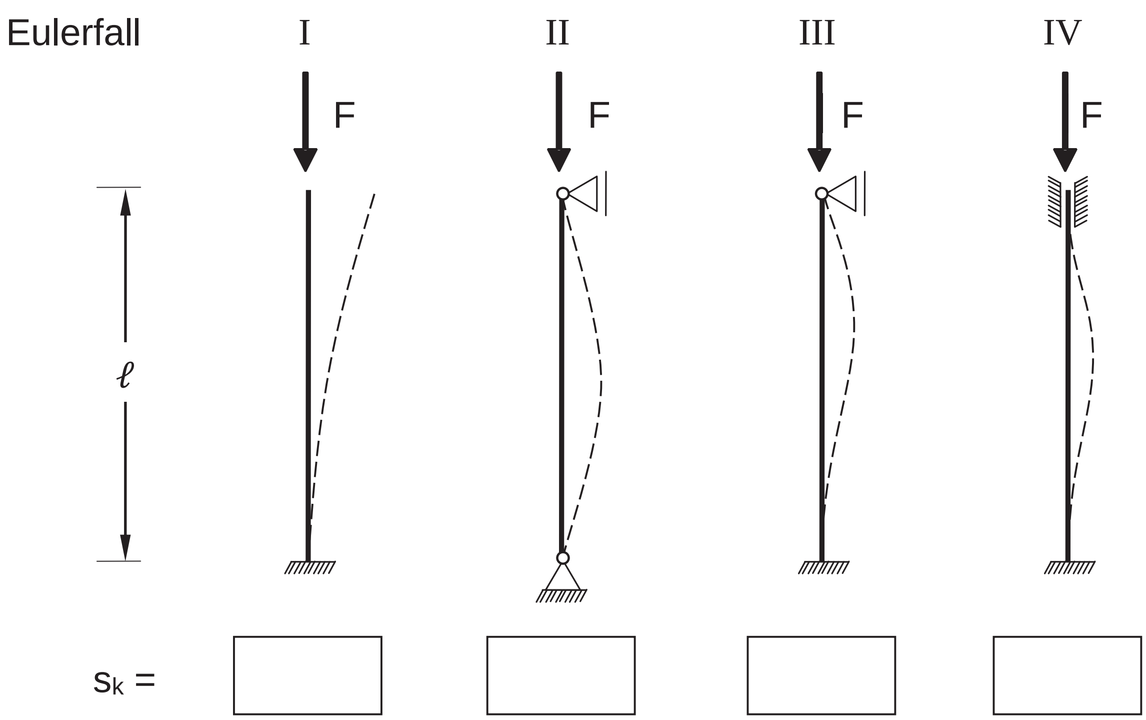
- Überschreiten der aufnehmbaren Druckspannung (Festigkeitsversagen)
- Überschreiten der Knicklast (Stabilitätsversagen).

Die kritische Last eines Druckstabes ist unabhängig von der Festigkeit:

$$F_{kr} = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{s_k^2}$$

Diese Formel für die „Euler'sche Knicklast" wurde von Leonard Euler (1707 – 1783) hergeleitet.

s_k ist die sogenannte Knicklänge, die sich aus der tatsächlichen freien Länge und den Randbedingungen (→ 4 „Euler-Fälle") ergibt:



Zur Einschätzung der Knickgefahr eines Stabes verwendet man die “Schlankheit” λ:

$$\lambda = \frac{s_k}{i}$$

i ist der Trägheitsradius des Querschnitts (siehe unten E.2). Die Schlankheit hängt also nur von der Geometrie des Balkens ab, nicht vom Material.
Je größer die Schlankheit (= Verhältnis von Knicklänge zu Trägheitsradius i des Querschnittes), desto größer die Knickgefahr.

E.2 Trägheitsradius i

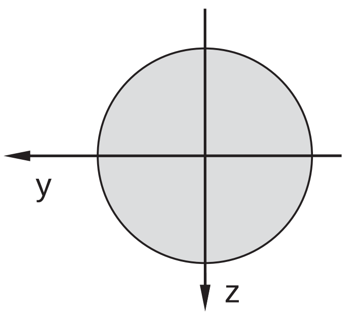
Der Trägheitsradius i ist die Querschnittskenngröße für das Stabilitätsversagen von gedrückten Stäben. Er ist definiert als

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad bzw. \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

- i_y ist maßgebend für das Knicken <u>um</u> die y-Achse, d.h. das Ausweichen in z-Richtung.
- i_z ist maßgebend für das Knicken <u>um</u> die z-Achse, d.h. das Ausweichen in y-Richtung.

Bei gleichen Lagerungsbedingungen in y- und z-Richtung ist der kleinere der beiden Werte maßgebend.

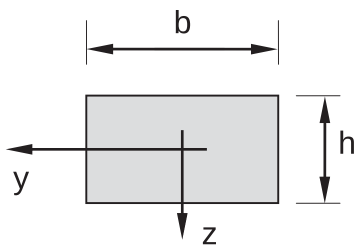
Kreisquerschnitt



$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot \frac{d^4}{64}}{\pi \cdot \frac{d^2}{4}}} = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}$$

analog: $i_z = \frac{r}{2}$

Rechteckquerschnitt



$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{b \cdot h^3/12}{b \cdot h}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

analog: $i_z = \frac{b}{\sqrt{12}}$

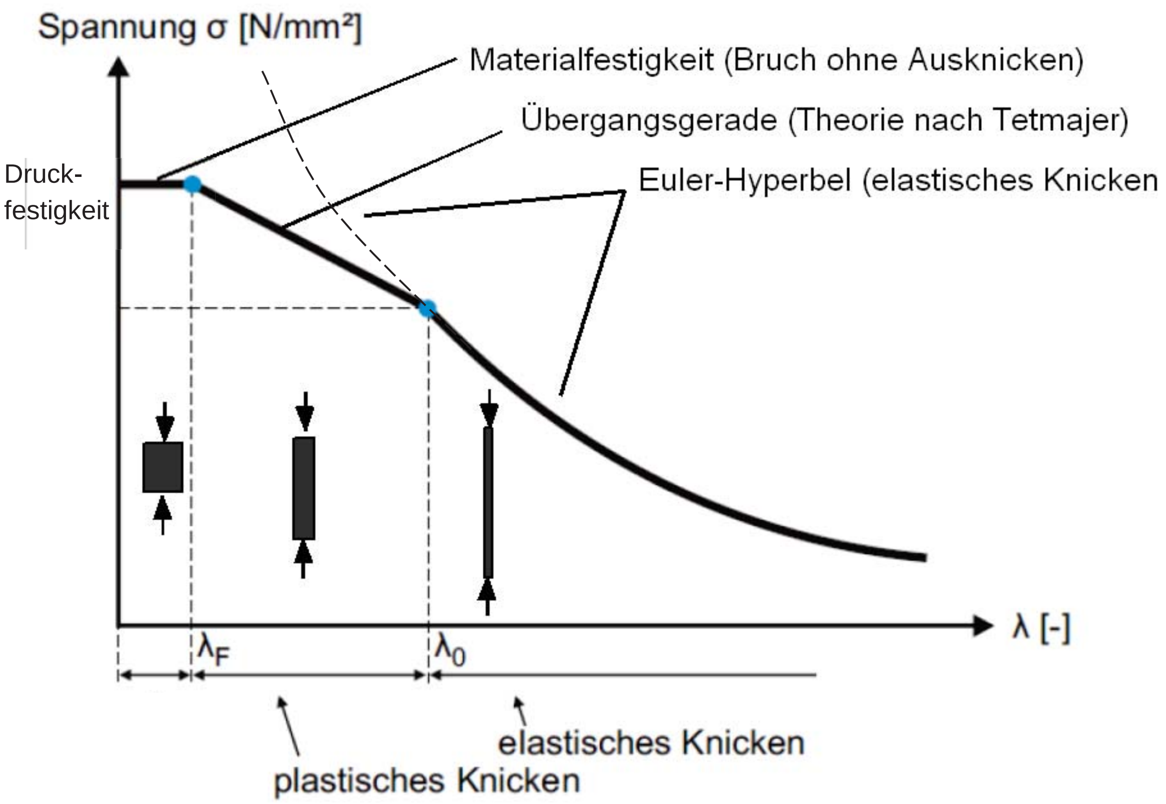
Setzt man die Schlankheit in die Formel für die Eulersche Knicklast ein, kann man die kritische Spannung ermitteln:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{A \cdot s_k^2}$$

$$mit\ \lambda = \frac{s_k}{i} = s_k\sqrt{A/I}$$

$$\sigma_{kr} = \frac{E \cdot \pi^2}{\lambda^2}$$

Damit ergibt sich eine Hyperbelfunktion für die kritische Spannung in Abhängigkeit der Schlankheit. Bei geringen Schlankheiten ist allerdings nicht das Euler'sche Knicken, sondern die Materialfestigkeit für das Versagen maßgebend. In einem Übergangsbereich zwischen reinem Material- und reinem Knickversagen wird häufig eine Gerade (nach Tetmajer) als Spannungsgrenze verwendet:



Merke:

Die Eulersche Knicklast F_{kr} enthält keine Sicherheitsbeiwerte und liegt in der Praxis auf der **un**sicheren Seite, da folgende Einflüsse nicht berücksichtigt sind:

- Imperfektionen (kein Stab ist ideal gerade)
- Querbelastungen (z.B. Wind, oder Eigengewicht bei liegenden Stäben)
- Ausmittigkeiten der Last (Abweichung vom Schwerpunkt)
- Das Materialverhalten weicht in Realität vom Hooke'schen Gesetz ab

Deshalb muss ein knickgefährdeter Stab mit einem relativ großen Sicherheitsbeiwert bemessen werden. Dies geschieht in den Normen (z. B. Eurocode 5 für Holzbauten) durch Abminderungsfaktoren für die Materialfestigkeit in Abhängigkeit der Schlankheit λ.

Bei jedem druckbeanspruchten Stab, der eine Schlankheit $\lambda > 20$ aufweist,
muss neben dem normalen Spannungsnachweis auch ein Knicknachweis geführt werden!

Aufgabe: Berechnen Sie die Schlankheit eines Spaghetti.