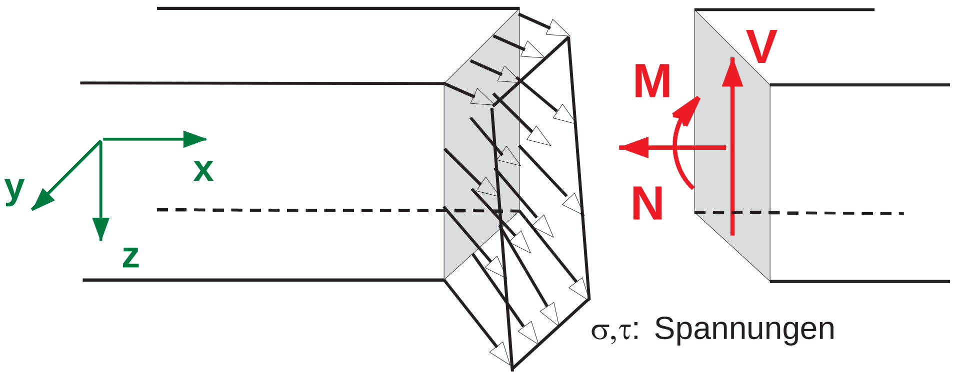
B.5. Spannungen und Dehnungen

B.5.1 Einführung

5.1.1 Der Spannungsbegriff

Wird ein Bauteil belastet, so entstehen innere Kräfte (Schnittgrößen).
Der in einem Schnitt **je Flächeneinheit** vorhandene Kraftanteil wird als **Spannung** bezeichnet. Die Spannungen sind ein Maß für die Beanspruchung des Materials und werden mit σ und τ bezeichnet.



Die Schnittgrößen N, V und M stellen somit nichts anderes als die Summenwirkung (Resultierende) der vorhandenen Spannungen im Querschnitt dar.

5.1.2 Einheit der Spannung

Die Spannung ist die innere Kraft bezogen auf die Querschnittsfläche z.B. aus einer Normalkraft:

$$\text{Spannung} = \frac{\text{innere Kraft}}{\text{Querschnittsfläche}} = \frac{N}{A} = \sigma$$

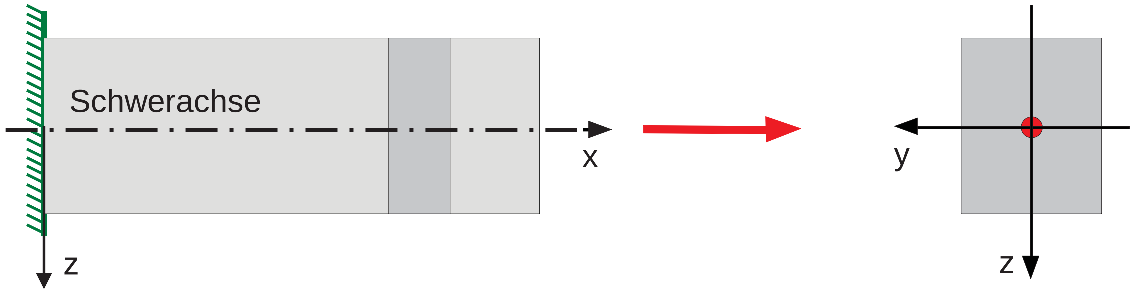
Übliche Einheiten:

Maschinenbau: N/mm^2 = MN/m^2 = MPa

Bauwesen: kN/cm^2 oder N/mm^2 ($1\ kN/cm^2 = 10\ N/mm^2$)

B.5.2 Einachsiger Spannungszustand

Von einem einachsigen Spannungszustand spricht man, wenn eine reine Zug- oder Druckbeanspruchung vorliegt, die im Schwerpunkt der betrachteten (Querschnitts-) Fläche angreift und senkrecht zu dieser Fläche wirkt.



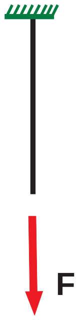
Diese Normalkraft erzeugt im Querschnitt eine gleichmäßige Spannungsverteilung:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \frac{F}{A}$$

Wichtig: Dieser einfache Zusammenhang gilt nur, wenn die Kraft im Schwerpunkt der Schnittfläche angreift. Exzentrisch angreifende Kräfte rufen eine ungleichmäßige Spannungsverteilung hervor (→ Biegung).

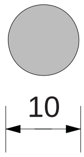
Beispiel: “Pfennigabsatz” auf Parkett:

Beispiel Zugstab:



Ein Rundstahl mit ⌀ 10 mm wird mit einer Zugkraft F = 10 kN beansprucht.

Querschnitt:



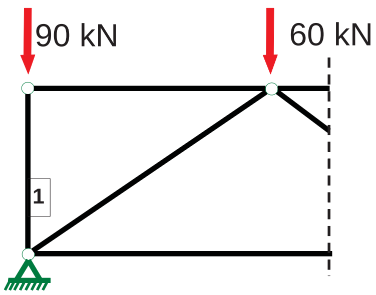
1. Wie groß ist die Spannung?

$$\sigma = \frac{F}{A} =$$

2. Welche Kraft kann der Stab maximal aufnehmen, wenn die aufnehmbare Spannung 235 N/mm² beträgt?

$$F_{max} = A \cdot \sigma_{max} =$$

Beispiel Druckstab (Fachwerk):



Stab 1: Kantholz 10/10 cm

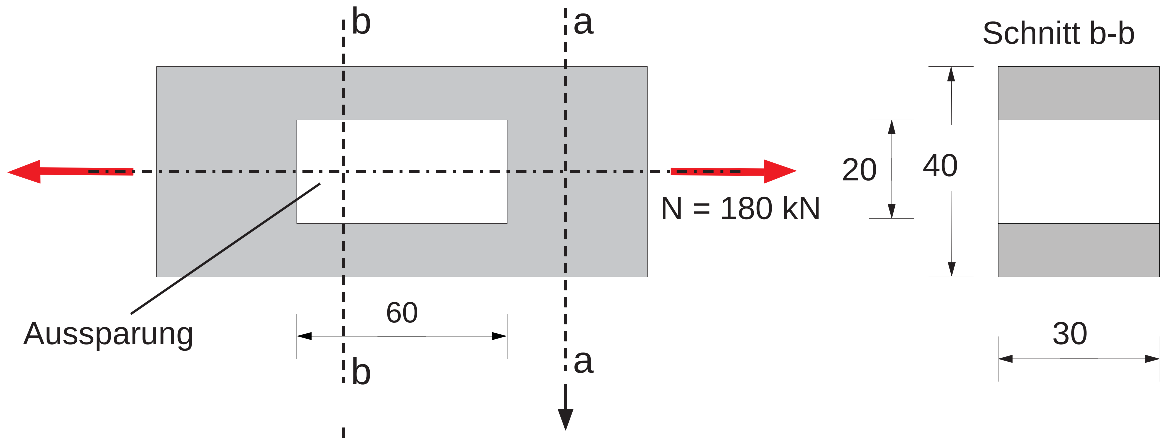
N_1: -90 kN

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} =$$

Wichtig: Bei Druckstäben ist zusätzlich ein Knicknachweis zu führen!

Zentrische Aussparungen in Stäben

Durch lokale Querschnittsschwächungen wird die kraftaufnehmende Querschnittsfläche eines Stabes reduziert. Für die Ermittlung der Spannungen ist dann die tatsächlich vorhandene **Netto-Querschnittsfläche** maßgebend.



Spannungen im Schnitt a-a

$$A = 40 \cdot 30 = 1200 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{a-a} = \frac{180}{1200} = 0{,}15 \text{ kN/cm}^2 = 1{,}5 \text{ N/mm}^2$$

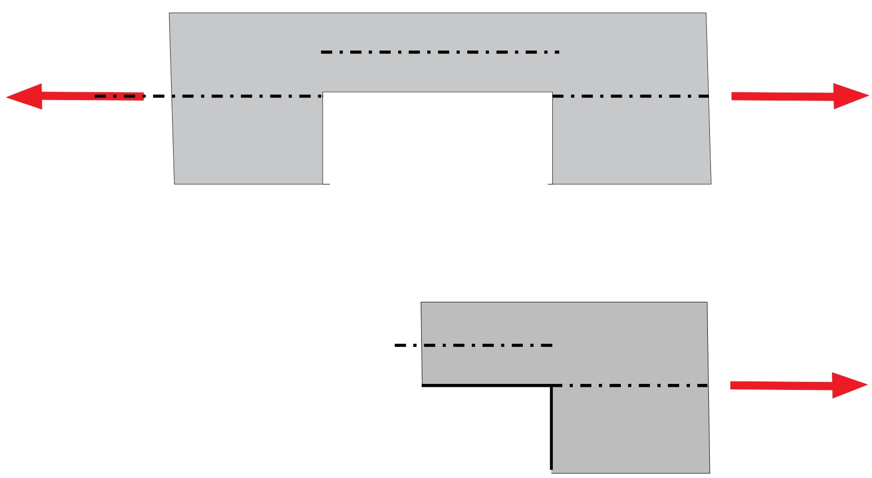
Spannungen im Schnitt b-b

$$A_{netto} = 40 \cdot 30 - 20 \cdot 30 = 600 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_{b-b} = \frac{180}{600} = 0{,}30 \text{ kN/cm}^2 = 3{,}0 \text{ N/mm}^2$$

Exzentrische Aussparungen in Stäben

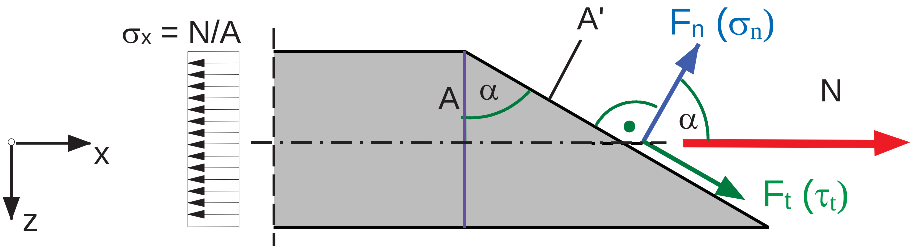
Wenn eine Schwächung außermittig erfolgt, dann tritt im geschwächten Querschnitt nicht nur eine Normalkraft sondern auch ein Biegemoment aus dem Versatz von N zur Achse des geschwächten Querschnitts auf.



Spannungen in schrägen Schnitten

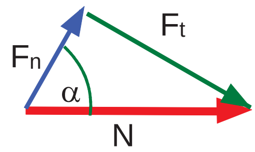
Anwendung: Z.B. schräge Leimfugen (Schäftung, Keilzinkung) oder Schweißnähte.

In einem Zugstab wirkt die Normalkraft N. Wird der Stab an einer beliebigen Stelle unter einem Winkel α geschnitten, so sind auf dieser Schnittfläche Normal- und Schubkräfte vorhanden.



Berechnung der schrägen Fläche: $$A' = \frac{A}{\cos\alpha}$$

Zerlegung der Normalkraft in Komponenten:



$$F_n = N \cdot \cos\alpha$$

$$F_t = N \cdot \sin\alpha$$

Normalspannung im schrägen Schnitt: $$\sigma_n = \frac{F_n}{A'}$$

$$\sigma_n = \frac{N \cdot \cos\alpha}{A} \cdot \cos\alpha = \frac{N}{A} \cdot \cos^2\alpha$$

$$\boxed{\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha \leqq \sigma_x}$$

Schubspannung im schrägen Schnitt: $$\tau_t = \frac{F_t}{A'}$$

$$\tau_t = \frac{N \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{A} = \sigma_x \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\boxed{\tau_t = \sigma_x \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

Diese Formel der Spannungsumrechnung in eine andere Richtung gilt auch bei Biegespannungsproblemen an jedem Punkt des Querschnitts. Hiermit können auch die Spannungen in einer Keilzinkung eines Biegebalkens berechnet werden.

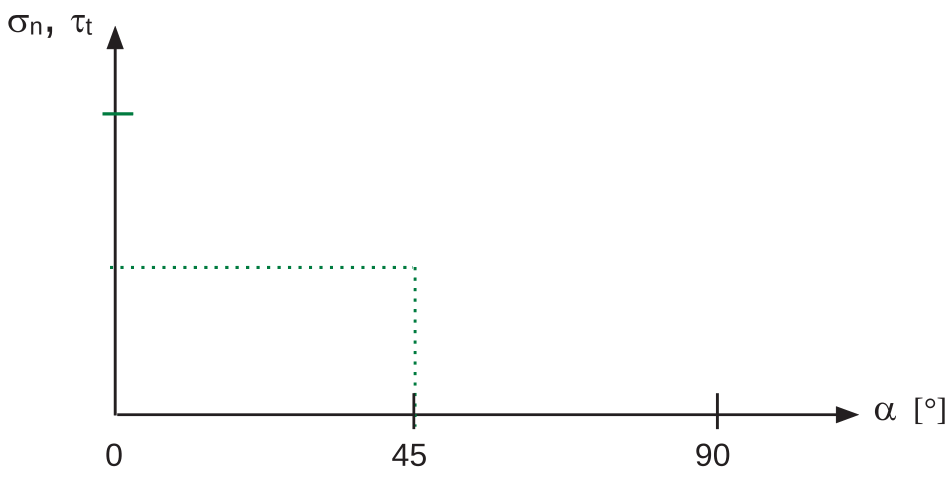
Analyse der Zusammenhänge:

σ_n wird maximal für $\alpha = 0°$ wegen $\cos 0° = 1$

$$\max \sigma_n = \sigma_n(\alpha = 0) = \sigma_x$$

$$\tau_t(\alpha = 0) = 0$$

für $\alpha = 45°$ nimmt τ_t den größten Wert an: $\max \tau_t = \dfrac{\sigma_x}{2}$



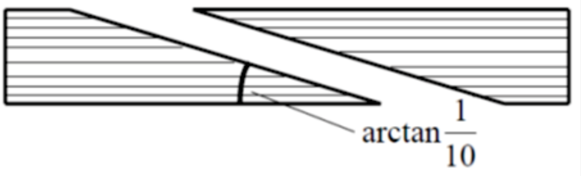
Übliche Steigung bei Keilzinkenverbindungen: 1:10 (α = 84°)

Regelung in DIN EN 1995-1-1/NA, NA.11.4 zu Schäftungsverbindungen:

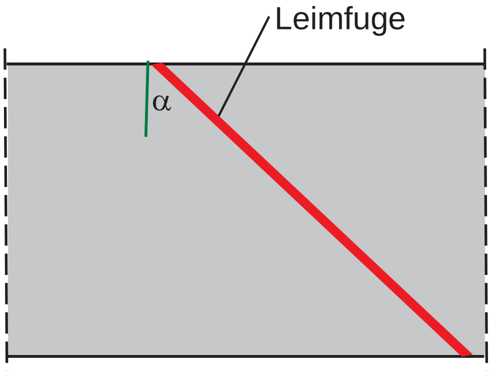
(NA.1) Schäftungsverbindungen sind faserparallele Stöße in Bauteilen aus Holz mit Klebflächenneigungen von höchstens 1/10.

(NA.2) Es gelten die Bemessungswerte der Tragfähigkeiten der ungeschwächten Stoßteile.

(NA.3) Die Bauteile dürfen nur in den Nutzungsklassen 1 und 2 verwendet werden.



Beispiel:



$\sigma_x = 10\ N/mm^2$

Vergleich der Spannungen in der Leimfuge für Neigung 1:1 und Neigung 1:10

Zugspannungen in der Fuge

$$\sigma_{n,1:1} = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha = 10 \cdot \cos^2(45°) = 5{,}0\ N/mm^2$$

$$\sigma_{n,1:10} = \sigma_x \cdot \cos^2\alpha = 10 \cdot \cos^2(84°) = 0{,}1\ N/mm^2$$

Scherspannung in der Fuge

$$\tau_{t;1:1} = \sigma_x \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 10 \cdot \sin(45°) \cdot \cos(45°) = 5{,}0\ N/mm^2$$

$$\tau_{t;1:10} = \sigma_x \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 10 \cdot \sin(84°) \cdot \cos(84°) = 1{,}0\ N/mm^2$$