

Lehrstuhl für Statik
der Technischen Universität München

Berechnungsmodelle für rißgefährdete Betonbauteile unter frühem Temperaturzwang

Benno Eierle

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Kreuzinger

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. K. Schikora

2. Univ.-Prof. Dr.-techn. Dr.-Ing. E.h. R. Springenschmid, emeritiert

Die Dissertation wurde am 20. Mai 1999 bei der Technischen Universität München
eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am
15. Dezember 1999 angenommen

Berechnungsmodelle für rißgefährdete Betonbauteile unter frühem Temperaturzwang

Übersicht

In Betonbauteilen entstehen durch das Abfließen der Hydratationswärme bei Behinderung der Temperaturdehnungen Eigen- und Zwangspannungen, die zu Rissen führen können. Die vorliegende Arbeit behandelt die wirklichkeitsnahe Simulation der physikalischen Vorgänge bei der Hydratation mit Hilfe der Finite-Element-Methode. Der Schwerpunkt liegt auf der strukturmechanischen Modellierung des nichtlinearen und zeitlich veränderlichen Werkstoffverhaltens des jungen Betons. Es wird u.a. ein viskoelastisches Stoffgesetz für Erhärtungs- und Schädigungsvorgänge abgeleitet, und ein diskretes Rißmodell für die normenkonforme Rißbreitenberechnung vorgestellt. Am Beispiel von Bodenplatten weißer Wannen wird der Einsatz der Rechenmodelle gezeigt.

Numerical methods for crack sensitive concrete structures under early thermal stresses

Abstract

The loss of the heat of hydration leads to restraint and intrinsic stresses in concrete structures that may cause cracks. This report is concerned with the realistic simulation of the physical processes during hydration using the Finite-Element-Method. Its focus is on the mechanical modelling of the nonlinear and time-dependent behaviour of young concrete. A viscoelastic constitutive law for solidification and deterioration is derived and a discrete crack model for the calculation of crack widths in accordance with the design codes is presented. Studies of base slabs as part of water tight concrete constructions show the application of the numerical methods.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1995 bis 2000 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Statik der Technischen Universität München.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. K. Schikora für die Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit ebenso wie für die außergewöhnliche Förderung und die sehr angenehme Zusammenarbeit während meiner Zeit am Lehrstuhl.

Herrn Univ.-Prof. Dr. techn. Dr.-Ing. E.h. R. Springenschmid danke ich für die Übernahme des Koreferates und das Interesse an der Arbeit sowie für die wertvollen Hinweise.

Das angenehme Arbeitsklima am Lehrstuhl und das freundschaftliche Verhältnis unter den Assistenten haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Herrn Dr.-Ing. J. Pravida schulde ich darüberhinaus Dank für die Durchsicht des Manuskripts und die fachlichen Diskussionen und Anregungen.

Für die freundliche Unterstützung bin ich auch Herrn Dr.-Ing. Th. Baumann (DYWIDAG), Herrn Dr.-Ing. J. Huckfeldt (HOCHTIEF), Herrn Dr.-Ing. M. Plannerer (Baustoffinstitut der TU München) und der Firma DIANA Analysis sehr dankbar.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meiner Frau für ihr Verständnis und ihre Geduld während der Entstehung dieser Arbeit bedanken. Für die oft mühsamen Stunden des Korrekturlesens bin ich ihr und meinem Schwiegervater zu besonderem Dank verpflichtet.

Augsburg, im Februar 2000.

Benno Eierle

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr.-Ing. H. Kreuzinger

Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. K. Schikora

2. Univ.-Prof. Dr.-techn. Dr.-Ing E.h. R. Springenschmid, emeritiert

Die Dissertation wurde am 20. Mai 1999 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen am 15. Dezember 1999 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------|------|
| Inhaltsverzeichnis | III |
| Bezeichnungen | VIII |
| 1 Einleitung | |
| 1.1 Problemstellung | 1 |
| 1.2 Stand der Forschung | 2 |
| 1.2.1 Überblick | 2 |
| 1.2.2 Experimentelle Methoden | 2 |
| 1.2.3 Beschreibung des Materialverhaltens | 3 |
| 1.2.4 Numerische Verfahren | 3 |
| 1.2.5 Rechnerische Modellierung des thermomechanischen Verhaltens | 4 |
| 1.2.6 Bemessungsmodelle für Temperaturzwang | 4 |
| 1.3 Ziel und Inhalt dieser Arbeit | 5 |
| 1.3.1 Thema der Arbeit | 5 |
| 1.3.2 Vorgehen | 5 |
| 1.3.3 Voraussetzungen der angestellten Untersuchungen | 6 |
| 2 Hydratationskinetik | |
| 2.1 Einleitung | 7 |
| 2.2 Chemische Vorgänge bei der Hydratation | 7 |
| 2.2.1 Entstehung der Hydratationswärme | 7 |
| 2.2.2 Hydratationschemie | 8 |
| 2.2.3 Experimentelle Ermittlung der Hydratationswärme | 10 |
| 2.2.4 Hydratationsgrad | 11 |
| 2.3 Ansätze für den Hydratationsfortschritt | 12 |
| 2.3.1 Empirische Ansätze | 12 |
| 2.3.2 Wirksames Betonalter | 12 |
| 2.3.3 Ansätze für den zeitlichen Verlauf der Hydratation | 14 |
| 2.3.4 Vergleich und Wertung der Ansätze | 23 |
| 2.4 Anwendung bei einer statischen Berechnung | 27 |
| 2.4.1 Statische Berechnungen mit Berücksichtigung der Hydratation | 27 |
| 2.4.2 Zeitlicher Verlauf der Wärmefreisetzung | 28 |
| 2.4.3 Ansatzfunktionen in Abhängigkeit des Hydratationsgrades | 30 |
| 2.4.4 Hilfsmittel für den praktischen Einsatz | 31 |
| 2.5 Zusammenfassung | 32 |

3 Thermomechanische Werkstoffeigenschaften hydratisierenden Betons

| | | |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 | Einleitung | 33 |
| 3.2 | Thermische Werkstoffeigenschaften | 33 |
| 3.2.1 | Wärmeleitfähigkeit | 33 |
| 3.2.2 | Spezifische Wärmekapazität | 34 |
| 3.3 | Hydratationsabhängigkeit der elastischen Werkstoffeigenschaften | 35 |
| 3.3.1 | Spannungs–Dehnungs–Beziehung | 35 |
| 3.3.2 | Elastizitätsmodul und Querdehnzahl | 36 |
| 3.3.3 | Temperaturdehnzahl | 38 |
| 3.3.4 | Lastunabhängige Dehnungen: Schwinden und Quellen | 39 |
| 3.4 | Hydratationsabhängigkeit der bruchmechanischen Werkstoffeigenschaften | 40 |
| 3.4.1 | Einaxiale Druckfestigkeit | 40 |
| 3.4.2 | Einaxiale Zugfestigkeit | 41 |
| 3.4.3 | Bruchenergie | 43 |
| 3.5 | Zusammenfassung | 46 |

4 Elastizität und Viskoelastizität alternder Werkstoffe

| | | |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 | Einleitung | 47 |
| 4.2 | Nichtlinear–elastische Werkstoffmodelle | 48 |
| 4.2.1 | Verformungsverhalten des hydratisierenden Betons | 48 |
| 4.2.2 | Hyperelastische Modelle | 49 |
| 4.2.3 | Inkrementelle Beschreibung (Hypoelastisches Modell) | 50 |
| 4.2.4 | Nichtlineare Elastizität bei Schädigung | 50 |
| 4.2.5 | Nichtlineare Elastizität bei Erhärtungsphänomenen | 52 |
| 4.2.6 | Anschauliche Deutung des Verhaltens bei Erhärtungsprozessen | 52 |
| 4.2.7 | Vereinheitlichte nichtlinear–elastische Theorie alternder Materialien | 55 |
| 4.3 | Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens | 56 |
| 4.3.1 | Phänomenologische Beschreibung | 56 |
| 4.3.2 | Viskoelastische Modelle für erhärteten Beton | 59 |
| 4.3.3 | Erhärtungsspezifische Modelle für Beton | 63 |
| 4.3.4 | Viskoelastische Modelle für Schädigung | 65 |
| 4.3.5 | Viskoelastisches Stoffgesetz bei Erhärtung oder Schädigung | 65 |
| 4.3.6 | Diskussion des viskoelastischen Ansatzes | 71 |
| 4.3.7 | Vereinheitlichtes viskoelastisches Stoffgesetz für alternde Materialien | 72 |
| 4.3.8 | Speicherplatzproblematik bei der Umsetzung in einem FE–Programm | 74 |
| 4.4 | Zusammenfassung | 76 |

5 Berechnung von Temperatur- und Verschiebungsfeldern mit der Finite-Element-Methode

| | | |
|-------|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1 | Kopplung der physikalischen Grundprobleme | 77 |
| 5.1.1 | Allgemeines | 77 |
| 5.1.2 | Arten der Kopplung von thermomechanischen Berechnungen | 78 |
| 5.1.3 | Gekoppelte Berechnungen mit der FEM | 79 |
| 5.2 | Berechnung von Temperaturfeldern infolge Hydratationswärme | 80 |
| 5.2.1 | Allgemeines | 80 |
| 5.2.2 | Theorie der Feldprobleme | 80 |
| 5.2.3 | Grundgleichungen der instationären Wärmeleitung | 82 |
| 5.2.4 | Finite-Element-Methode für instationäre Wärmeleitungsprobleme. | 83 |
| 5.2.5 | Wahl der Temperaturrandbedingungen | 85 |
| 5.3 | Berechnung von Hydratationsgradfeldern | 86 |
| 5.4 | Berechnung von Verschiebungsfeldern gerissener Betonstrukturen | 87 |
| 5.4.1 | Grundlagen. | 87 |
| 5.4.2 | Beschreibung der Ribbildung | 89 |
| 5.4.3 | Verschmiertes Ribmodell | 90 |
| 5.4.4 | Diskretes Ribmodell | 96 |
| 5.4.5 | Modellierung der Bewehrung. | 98 |
| 5.5 | Zusammenfassung | 100 |

6 Normenorientiertes Ribmodell für den Nachweis der Ribbreite

| | | |
|-------|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.1 | Allgemeines. | 101 |
| 6.2 | Grundlagen zur Beschränkung der Ribbreite | 101 |
| 6.2.1 | Grundgedanken der Ribtheorie | 101 |
| 6.2.2 | Mechanismus der Ribbildung: Maximaler und minimaler Ribabstand | 106 |
| 6.2.3 | Besonderheiten bei jungem Beton | 107 |
| 6.3 | Stoffgesetz für ein diskretes Bewehrungs-Rib-Element | 108 |
| 6.3.1 | Grundgedanken | 108 |
| 6.3.2 | Ableitung der konstitutiven Beziehung | 108 |
| 6.3.3 | Anwendung und Wertung des Modells. | 117 |
| 6.3.4 | Besonderheiten bei verformungsbehinderten Bauteilen | 117 |
| 6.4 | Vergleich mit anderen Ribmodellen. | 118 |
| 6.5 | Zusammenfassung | 122 |

7 Verformungsbehinderte Bauteile unter Temperaturzwang

| | | |
|-------|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.1 | Zwangspannungen infolge von Temperatureinwirkung | 125 |
| 7.2 | Verformungsbehinderung durch Bodenreibung | 126 |
| 7.2.1 | Allgemeines | 126 |
| 7.2.2 | Ausführung mit einer Gleitschicht | 128 |
| 7.2.3 | Ausführung ohne Gleitschicht auf nichtbindigen Böden | 128 |
| 7.3 | Rißbildung | 129 |
| 7.3.1 | Mechanismus der Rißbildung bei Last und Zwang | 129 |
| 7.3.2 | Anwendbarkeit der genormten Mindestbewehrung | 129 |
| 7.4 | Bemessungskonzept auf Grundlage von Finite–Element–Berechnungen | 130 |
| 7.4.1 | Materialparameter als Berechnungsgrundlage | 130 |
| 7.4.2 | Kriterien für die zulässige Rißbreite | 131 |
| 7.4.3 | Anwendungen und Rechengang | 131 |

8 Anwendung am Beispiel von Bodenplatten weißer Wannen

| | | |
|-------|-------------------------------------------------------|-----|
| 8.1 | Berechnungsgrundlagen | 133 |
| 8.1.1 | Problemstellung | 133 |
| 8.1.2 | Rechenmodell und Systemausschnitt | 133 |
| 8.1.3 | Finite–Element–Diskretisierung | 134 |
| 8.1.4 | Interaktion mit dem Boden | 135 |
| 8.2 | Verifikation des Berechnungsmodells | 136 |
| 8.2.1 | Allgemeines | 136 |
| 8.2.2 | Adiabatische Wärmeentwicklung | 136 |
| 8.2.3 | Reißrahmenversuche | 137 |
| 8.2.4 | Messungen an einer ausgeführten Bodenplatte | 138 |
| 8.3 | Verhalten am Plattenrand | 141 |
| 8.3.1 | System | 141 |
| 8.3.2 | Temperatur- und Hydratationsberechnung | 141 |
| 8.3.3 | Spannungsberechnung | 143 |
| 8.4 | Verhalten im Inneren der Bodenplatte | 149 |
| 8.4.1 | System | 149 |
| 8.4.2 | Temperatur- und Hydratationsgradberechnung | 150 |
| 8.4.3 | Ungerissener Zustand | 150 |
| 8.4.4 | Rißbildung ohne Bewehrung | 150 |
| 8.4.5 | Einfluß der Bewehrung | 152 |
| 8.4.6 | Untersuchung einer zweischichtigen Bauweise | 157 |
| 8.5 | Zusammenfassung | 160 |

9 Zusammenfassung

| | |
|--------------------------------------------------|-----|
| 9.1 Motivation | 163 |
| 9.2 Ergebnisse dieser Forschungsarbeit | 163 |
| 9.3 Anregung für weitere Forschungen | 165 |
| 9.4 Fazit. | 166 |

Anhang

| | | |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| A | Betoneigenschaften | |
| A.1 | Betone nach Huckfeldt | 167 |
| A.2 | Betone nach Plannerer | 168 |
| A.3 | Standardbetone für den Hydratationsansatz nach Wesche | 170 |
| B | Wärmefreisetzung während der Hydratation | |
| B.1 | Isotherme Wärmefreisetzung (Realzeit). | 171 |
| B.2 | Isotherme Wärmefreisetzung (Hydratationsgrad) | 172 |
| B.3 | Adiabate Wärmefreisetzung | 174 |
| B.4 | Ansatzfunktionen für den Ansatz von Reinhardt et al.. | 176 |
| C | Ergänzungen zum viskoelastischen Stoffgesetz | |
| C.1 | Inkrementelle Formulierung | 179 |
| C.2 | Thermodynamische Überlegungen | 182 |
| D | Ergänzungen zum normenorientierten Rißmodell | |
| D.1 | Anwendung auf Grundlage anderer Normen | 185 |
| D.2 | Näherung für das diskrete Bewehrungs-Riß-Modell mit Federelementen. | 187 |
| | Literaturverzeichnis | 191 |

Bezeichnungen

Die Unterscheidung gleichartiger Bezeichnungen für unterschiedliche Größen ist aus dem Zusammenhang ersichtlich. Alle hier nicht aufgeführten sowie abweichend definierte Größen oder Bezeichnungen werden explizit im Text erläutert.

Skalare

| | |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a, b, ... | Modellparameter (Erläuterung im Text) |
| A | Querschnittsfläche Aktivierungsenergie (Kapitel 2) |
| c | Spezifische Wärmekapazität |
| c_A | Arrhenius Konstante |
| C | Speicherkoeffizient bei Feldproblemen Steifigkeit |
| C_F | Steifigkeit des Gleitreibungswiderstandes in der Sohlfuge |
| d | Dicke von Bauteilen oder Schichten |
| D | Einaxiale elastische Nachgiebigkeit |
| D_k | Größtkorndurchmesser |
| E | Elastizitätsmodul |
| \bar{E} | Elastizitätsmodul im ungeschädigten Zustand bei abgeschlossener Erhärtung ($\beta = 1, \delta = 0$) |
| E | Energiezustand |
| f | Festigkeit |
| f, \tilde{f} | Hilfsfunktion zur Beschreibung der Wärmefreisetzung (Kapitel 2) |
| F | Kraft (Betrag) Skalierungsfaktor (Kapitel 2) |
| F | Freie Energie |
| g | Reifefunktion (Kapitel 2) Eigengewicht |
| G | Schubmodul Zuschlagsgehalt im Beton |
| G_f | Zug-Bruchenergie |
| H | Verfestigungsmodul von Stahl |
| J | Viskoelastische Nachgiebigkeit |
| k_o | Länge ohne Verbund im Rißmodell |
| l, l | Länge |
| l_τ | Eintragungslänge für Verbundspannungen |
| N | Entfestigungsmodul der Spannungs-Rißöffnungsbeziehung |
| p | (Wärme-) Fluß |
| q, q_v | Volumenbezogene Wärmefreisetzungsrates |
| Q | Wärmemenge |

| | |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Q | Wärmeenergiezustand |
| r, \tilde{r} | Reaktionsgrad |
| R | Universelle Gaskonstante |
| s | Rißabstand |
| S | Entropie |
| t | Zeit, tatsächliches Betonalter |
| t_0 | Belastungszeitpunkt, Erstbelastungsalter |
| T | absolute Temperatur [K], $T = \vartheta + 273$ |
| u | (Knoten-)Verschiebung |
| U | Bewehrungsumfang |
| U | Innere Energie |
| v_{Wind} | Windgeschwindigkeit |
| w | Rißbreite |
| W | Wassergehalt im Beton |
| W | Mechanischer Energiezustand, Arbeit |
| z | Primäre Zustandsgröße eines Feldproblems |
| Z | Zementgehalt im Beton |
| α | Hydratationsgrad |
| α_o | Hydratationsgrad beim Einsetzen von Festkörpereigenschaften des Betons |
| $\alpha_{\ddot{u}}$ | Wärmeübergangskoeffizient |
| α_t | Faktor zur Kennzeichnung des Kollokationszeitpunktes bei Zeitintegrationsverfahren |
| α_T | Temperaturdehnzahl |
| β | Erhärtungsgrad (vgl. Gleichung (4.16)) |
| | Faktor beim Rißmodell |
| $\beta_1, \beta_2, \beta_r$ | Beiwerte zum Rißgesetz |
| β_τ | Abminderungsfaktor für die Schubsteifigkeit im Riß |
| $\hat{\beta}$ | Bezogene Festigkeit (vgl. Gl. (3.10) und (3.11)) |
| γ | Wichte |
| | Schubgleitung |
| Γ | Rand eines Gebietes Ω |
| δ | Schädigungsgrad (vgl. Gleichung (4.16)) |
| δ_{sf} | Reibungswinkel in der Sohlfuge |
| ε | Einaxiale Dehnung |
| η | Dämpferkennzahl |
| ϑ | Temperatur [$^{\circ}\text{C}$] |
| λ | Wärmeleitfähigkeit |
| | Parameter für die Elementabmessung (Kapitel 5) |
| λ_Γ | Wärmeübergangskoeffizient |
| μ | Reibungsbeiwert |
| ν | Querdehnzahl |
| ρ | Geometrischer Bewehrungsgrad |
| | Dichte |
| σ | Einaxiale Spannung |
| τ | Schub- oder Verbundspannung |
| | Integrationsvariable für die Belastungszeitpunkte |

| | |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| τ_w | Wirksames Betonalter |
| ϕ | Überschußfeuchte |
| φ | Kriechzahl, -funktion (vgl. Gleichung (4.21)) |
| φ_{E28} | Kriechzahl, -funktion bezogen auf die 28-Tage-Steifigkeit (vgl. Gleichung (4.29)) |
| ψ | Grad der Verformungsbehinderung |
| Ω | betrachtetes Gebiet |
| \varnothing_s | Bewehrungsdurchmesser |

Vektoren

| | |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| \mathbf{n} | Normalenvektor |
| \mathbf{p} | Vektor des Wärmeflusses |
| \mathbf{P} | Lastvektor, Vektor der inneren bzw. äußeren Knotenkräfte |
| \mathbf{Q} | Vektor der Wärmequellen (Lastvektor des Feldproblems) |
| \mathbf{u} | Vektor der Knotenverschiebungen |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | Dehnungsvektor |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | Spannungsvektor |
| \mathfrak{S} | Vektor der Knotentemperaturen |
| ∇ | Differentialoperator $\nabla^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$ |

Matrizen

| | |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| \mathbf{B} | Matrix mit den Gradienten der Ansatzfunktionen |
| \mathbf{C} | Dimensionslose Matrix (vgl. Abb. 4-8) Kapazitätsmatrix (Wärmeleitung) |
| \mathbf{D} | Inverse der Werkstoffmatrix \mathbf{E} |
| \mathbf{E} | Werkstoffmatrix |
| \mathbf{I} | Einheitsmatrix |
| \mathbf{K} | Steifigkeitsmatrix Konduktivitätsmatrix (Wärmeleitung) |
| \mathbf{N} | Ansatzfunktionsmatrix |
| \mathbf{T} | Transformationsmatrix |
| $\boldsymbol{\lambda}$ | Leitfähigkeitsmatrix |

Indizes

| | |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| 1, 2, ... | Durchnumerierte Anteile oder Zeitpunkte |
| 28 | Im Alter von 28 Tagen bzw. bezogen auf die 28-Tage-Eigenschaften |
| I, II, ... | Rißmodus (Mode I bzw. Mode II) Zustand des Bewehrungs-Riß-Elementes (Kap. 6) |
| ad | Adiabate Erhärtungsbedingungen (ideale Isolierung) |
| AR | Abgeschlossenes Rißbild |
| b | Beton |

| | |
|---------|--------------------------------------------------------------|
| BRE | Bewehrungs-Riß-Element |
| c | Beton Druck |
| cc | Beton auf Druck |
| ct | Beton auf Zug |
| D | Dissipativ |
| e | Elastisch |
| E28 | Bezogen auf den 28-Tage-E-Modul |
| ef, eff | Effektiver Wert |
| eq | Äquivalenter Wert |
| ER | Erststadium |
| ext | Extern, äußere |
| F, Fl | Fließen |
| G | Zuschlag |
| ges | Gesamt |
| int | Intern, innere |
| iso | Isotherme Erhärtungsbedingungen (Temperatur bleibt konstant) |
| k | Charakteristischer Wert |
| m | Mittelwert |
| max | Maximalwert |
| min | Minimalwert |
| N2 | Zweiter Nullspannungszustand |
| pl | Plastisch |
| pz | Rißprozeßzone |
| r | (Im) Riß, rißbedingt |
| R | Reibung, reibungsbedingt Rechenwert |
| rev | Reversibel |
| s | Stahl Schwinden |
| s, sek | Sekantensteifigkeit |
| sf | Sohlfuge |
| t | Zug |
| T | Transponierte Form eines Vektors bzw. einer Matrix |
| u | Verschiebung, verschiebungsbedingt |
| V | volumenbezogen |
| W | Wasser |
| x, y, z | Richtungen im Koordinatensystem |
| y | Streckgrenze |
| Z | Zement |
| ϑ | Temperaturbedingt |
| φ | Viskos, viskositätsbedingt, infolge Kriechen und Relaxation |
| ∞ | Unendlichkeitszeitpunkt |

Abkürzungen

| | |
|-----|---------------------------|
| BRE | Bewehrungs-Riß-Element |
| ESZ | Ebener Spannungszustand |
| EVZ | Ebener Verzerrungszustand |
| SA | Symmetrieachse |

Notation

Die Notationen werden am Beispiel der fiktiven Größe a gezeigt:

\bar{a} Eingeprägte Größe

$\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial t}$ Zeitableitung, Rate

$a_{,x} = \frac{\partial a}{\partial x}$ Partielle Ableitung

Δa Zuwachs der Größe a , Differenz zu einem Referenzzustand
Laplace-Operator

(a) Arctan(a) in Diagrammen zur Bezeichnung der Kurvensteigung

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung

Etwa zu Beginn des 20. Jahrhunderts erkannte man, daß durch die hydrationsbedingte Wärme in massigen Betonbauteilen Risse entstehen können. Anfangs wurde das Augenmerk auf betontechnologische Methoden gerichtet, um die Temperaturen bei großen Wasserbauten aus Beton, insbesondere Staudämmen, niedrig zu halten. Später beobachtete man, daß auch weniger massige Betonbauteile von diesem Phänomen betroffen sind [212]. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien hier einige typische Bauwerkskategorien genannt:

- Staumauern, Stauwehre (allgemein: Massenbetonbauwerke)
- Bodenplatten von weißen Wannen (allgemein: Verformungsbehinderung durch Reibung)
- Tunnelinnenschalen, Ortbetoneingussung von Fertigteilen, Wände auf Bodenplatten (allgemein: Verbund mit älteren Betonbauteilen)

Es wurde phänomenologisch festgestellt, daß eine Verformungsbehinderung bei bestimmten, aus Erfahrungswerten für jeden Bauwerkstyp abgeleiteten hydrationsbedingten Temperaturen zu Rissen führt. Durch Vergleich dieser Grenztemperaturen mit der erwarteten Erwärmung erfolgte eine Einschätzung des Rißrisikos. Inzwischen hat sich die Erkenntnis durchgesetzt, daß Grenztemperaturen nur sehr grobe Anhaltswerte für die Beurteilung der Rißgefahr darstellen, da zwischen Temperatur und Zwangspannung im Beton ein nicht zuletzt vom Bauwerk abhängiger, nichtlinearer Zusammenhang besteht. Allerdings konzentrieren sich auch heute noch die meisten Untersuchungen auf die Beurteilung der Rißgefährdung, natürlich auf Grundlage fortschreitender Erkenntnisse um die Vorgänge während der Hydratation. Wenn ein Bauteil als nicht rißgefährdet eingestuft wird, verzichtet man fallweise gänzlich auf eine rißbreitenbeschränkende Bewehrung. Andererseits wird bei einer Rißgefährdung häufig die Mindestbewehrung nach der Norm eingelegt, die gerade bei den oben genannten Bauwerken erheblich auf der sicheren Seite liegen kann, da günstige Einflüsse unberücksichtigt bleiben.

Nach Meinung des Verfassers müssen Risse als Bestandteil der Stahlbetonbauweise auch bei wasserundurchlässigen Bauwerken akzeptiert werden. Sie stellen keinen Mangel dar, wenn das Bauwerk so konstruiert ist, daß die Risse weder die Gebrauchstauglichkeit noch die Standsicherheit beim gegebenen Sicherheitsniveau beeinträchtigen. Dazu ist die Rißbreite problemangepaßt zu begrenzen. Da die Rißbreite eine stark streuende Größe ist, kann es sogar im Sinne eines Kostenminimums angebracht sein, in Absprache mit dem Bauherrn einige breite Risse in Kauf zu nehmen, die planmäßig verpreßt werden. Eine entsprechende Bemessung ist in der Planungsphase dann möglich,

wenn die Vorgänge von der Hydratation bis hin zur Rißbildung rechnerisch abgebildet werden können. Hierzu einen Beitrag zu leisten, ist das Ziel dieser Arbeit.

1.2 Stand der Forschung

1.2.1 Überblick

Bisherige Forschungen beschäftigen sich hauptsächlich damit, das Rißrisiko in Betonbauteilen zu beziffern. Hierfür sind im wesentlichen zwei Teilprobleme zu lösen [144]:

1. Vorhersage oder Messung des zeitlichen Temperaturverlaufs während der Hydratation.
2. Vorhersage der mechanischen Zustandsgrößen, die infolge der Hydratationstemperaturen auftreten. Gleichzeitig ist auch die Vorhersage der Entwicklung mechanischer Kenngrößen, insbesondere von Zugfestigkeit und Steifigkeit, notwendig.

Darauf aufbauend erfolgt eine Untersuchung des Spannungszustands vor der Rißbildung, um durch Vergleich mit den Festigkeiten Aussagen über die Rißgefährdung zu erhalten. Die Frage der Rißgefährdung allein ist für den entwerfenden Ingenieur nur dann ein brauchbares Instrument, wenn die Antwort lautet, daß das Bauteil nicht rißgefährdet ist, und daher keine weiteren Maßnahmen zu treffen sind. Trotz dieser Einschätzung traten in der Vergangenheit bei derartigen Bauwerken Risse auf, da die Bewertung des Rißrisikos mit großen Unsicherheiten behaftet ist und äußerst sensitiv auf Änderungen von Randbedingungen und Material reagiert [218]. Im anderen Fall bleibt dem entwerfenden Ingenieur nichts anderes übrig, als die Rißbreite zu beschränken. Geht er dabei von den Mindestbewehrungsmengen nach den Normen aus, die unabhängig von den Bedingungen des tatsächlichen Tragwerkes den ungünstigsten Fall abdecken, ergeben sich oft unnötig große Bewehrungsmengen. Deshalb wird in dieser Abhandlung die These vertreten, daß die beiden obigen Punkte um einen weiteren zu ergänzen sind:

3. Abschätzung der möglichen Rißbreiten am Bauwerk durch Simulation der Rißvorgänge und der Verformungsbehinderungen unter Einbeziehung von Grenzbetrachtungen.

Damit ergibt sich die Möglichkeit, die Größe der Mindestbewehrung an die Bauwerksgegebenheiten anzupassen und zusammen mit den betontechnologischen und den konstruktiven Maßnahmen zu optimieren.

1.2.2 Experimentelle Methoden

Temperaturen infolge von Hydratationsvorgängen können im Labor sehr gut untersucht werden. Die Spannungsmessung, die indirekt über Verformungen und daraus abgeleitete Dehnungen erfolgt, gestaltet sich bei Zwang erheblich schwieriger. Die interessierenden Zwangsspannungen resultieren nämlich gerade aus dem behinderten Anteil der Verformung, der nicht direkt gemessen werden kann. Aus diesem Grund ist die Messung von Zwangsspannungen in situ noch Gegenstand der Forschung [124,161,218].

Vor allem am Baustoffinstitut der TU München wurden in den letzten Jahren Methoden entwickelt, um im Labor die Reißneigung einer Betonrezeptur untersuchen zu können [213]. Der sogenannte Reißrahmen ist in erster Linie für qualitative Vergleiche geeignet, da Größe und Art der

Verformungsbehinderung im Bauwerk nicht in die Betrachtung einfließen [217]. Die Weiterentwicklung mündete in die sogenannte Temperaturspannungs-Prüfmaschine, bei der die Verformungsbehinderung rechnergesteuert simuliert werden kann [31, 135, 218]. Indem der Versuchskörper möglichst realistischen Erhärtingsbedingungen ausgesetzt wird, können Betonrezepturen gefunden werden, welche eine geringe Reißneigung besitzen, d.h. bei denen die Entwicklung von Wärme und Festigkeit entsprechend aufeinander abgestimmt ist.

Die Münchner Untersuchungen [31, 135, 193, 211, 214-218] haben wesentlich zum Verständnis der Entstehung von hydratationsbedingten Zwangsspannungen und deren Einflußparametern beigetragen. Da die Geometrie des Versuchskörpers festgelegt ist, eignen sich die entwickelten Methoden in erster Linie, um das Reißrisiko des unbewehrten Bauteils mit dem Ziel der Reißvermeidung zu minimieren. Obwohl ein Aufschluß über Reißbreiten bzw. die reißbreitenbeschränkende Bewehrung eines bestimmten Bauteils nicht möglich ist, können die Laboruntersuchungen auch im Hinblick auf die Reißbreitenbeschränkung zur Optimierung der Betonrezeptur herangezogen werden.

1.2.3 Beschreibung des Materialverhaltens

Eine wesentliche Problematik der rechnerischen Erfassung hydratationsbedingter Beanspruchungen liegt in der starken Veränderlichkeit nahezu aller Materialparameter im betrachteten Zeitraum. Ohne diese Veränderlichkeit wäre nach dem Abkühlen auf die Ausgangstemperatur auch wieder der Ausgangsspannungszustand erreicht. Es würde sich somit um einen trivialen Temperaturlastfall handeln.

Die tatsächlichen Verhältnisse und deren enorme praktische Relevanz eröffnen ein weites Forschungsfeld. Ein Teilaspekt liegt in der Behandlung des zeitlichen Verlaufs der Hydratation, zu dem eine Vielzahl an Arbeiten existiert. Große Fortschritte wurden bei der Erforschung der Veränderlichkeit der mechanischen Materialkennwerte gemacht. Ein Durchbruch war die Beschreibung in Abhängigkeit des Hydratationsgrades, da hiermit der Einfluß der Erhärtingsbedingungen in der Formulierung eliminiert werden konnte [126]. Derzeitige Forschungen in der Baustoffkunde konzentrieren sich auf das Hydratationsverhalten von neuartigen Betonen, z.B. Hochleistungsbeton mit geringem Wassermenge-Wert, und auf die Modellierung der Abbindevorgänge mittels Computersimulationen [32, 103].

Die vorliegende Arbeit stützt sich hinsichtlich der Modellierung der Materialparameter hauptsächlich auf die Braunschweiger Dissertationen von Laube [126] und Gutsch [83]. Es werden aber auch die Arbeiten von Breitenbücher [31], Mangold [135], Plannerer [161] und Schöppel [193] aus dem Münchner Baustoffinstitut herangezogen.

1.2.4 Numerische Verfahren

Numerische Simulationen stellen heute eine wichtige Ergänzung zu den zwei klassischen Säulen der Ingenieurwissenschaften, den analytischen Lösungen und den experimentellen Methoden, dar. Wie beim Experiment erhält man nur einen punktuellen Aufschluß, und erst durch eine Parametervariation wird der Einblick in tiefgreifende Zusammenhänge auf empirische Weise möglich. Andererseits sind numerische Simulationen stark an theoretische Lösungen gebunden. Allen drei Disziplinen ist gemeinsam, daß gewisse Annahmen, Vereinfachungen und Idealisierungen unabdingbare Voraussetzungen für die Durchführung sind, welche die Qualität bzw. Realitätsnähe der Ergebnisse maßgeblich bestimmen. In der Strukturmechanik ist die Finite-Element-Methode (*FEM*) unter den numerischen Verfahren aufgrund ihrer Flexibilität und Leistungsfähigkeit am weitesten verbreitet. Die Untersuchungen in dieser Arbeit werden ausschließlich mit der *FEM* durchgeführt.

1.2.5 Rechnerische Modellierung des thermomechanischen Verhaltens

Die Berechnung instationärer Temperaturfelder mit der FEM ist hinsichtlich der Anwendung in dieser Arbeit ausreichend erforscht [129, 222]. Die Modellierung der Wärmefreisetzung während der Hydratation ist in jüngerer Zeit intensiv untersucht worden [83, 101, 102, 103, 126]. Es existieren relativ viele verschiedene Ansätze, die u. a. im Kapitel 2 dieser Arbeit verglichen werden. Grundlegende Arbeiten zur numerischen Simulation der gekoppelten Thermomechanik stammen von Argyris et al. [1, 2] und von Mische [143]. Wie im Verlauf der Arbeit erläutert wird, kann für die Berechnung von Hydratationsvorgängen die im allgemeinen zweiseitige Kopplung auf eine einseitige Abhängigkeit reduziert werden.

Die Modellierung des viskoelastischen Verhaltens von erhärtendem Beton in dieser Arbeit baut wesentlich auf Veröffentlichungen von Bažant et al. auf [7-19, 37, 38]. Zu diesem Thema wird auch an der Luleå University of Technology in Schweden geforscht [62, 102]. Für die Abbildung des Zugversagens von Beton kann auf bekannte Ansätze für verschmierte und diskrete Rißmodelle zurückgegriffen werden [93]. Allerdings eignen sich die vorhandenen Rißmodelle nicht, um Rißbreiten zu berechnen, die sich in Übereinstimmung mit den Bemessungsmodellen der Betonbaunormen befinden. Deshalb wird in dieser Arbeit eine entsprechende Ergänzung zum diskreten Rißmodell in Form eines Bewehrungs-Riß-Elements vorgeschlagen.

Die Abbildung des gesamten Hydratationsprozesses von der Wärmeentwicklung bis zur Rißbildung mittels der FEM wurde bisher in den Dissertationen von Hamfler [87] und Huckfeldt [97] behandelt. Beide Arbeiten verwenden verschmierte Rißmodelle, zum Teil ohne Berücksichtigung der Bewehrung. Sie zielen auf die Erfassung des globalen Tragverhaltens und verzichten auf Untersuchungen zur Rißbreite. Ein Berechnungskonzept mit Berücksichtigung der Rißbildung unter dem Gesichtspunkt der Rißbreitenbeschränkung hydrationsbedingter Risse in wasserundurchlässigen Betonbauteilen gibt es bis dato nach Wissen des Autors nicht.

1.2.6 Bemessungsmodelle für Temperaturzwang

Das herkömmliche Vorgehen, mit genormten Lastannahmen über eine statische Berechnung zu Schnittgrößen für eine Bemessung nach Norm zu gelangen, ist bei Zwang infolge Hydratation nicht möglich. In den Vorschriften existieren zum einen nur vage Angaben über die anzusetzenden Temperaturen, zum anderen sind Materialmodelle für jungen Beton bisher nicht genormt. Insgesamt kann festgestellt werden, daß eine Diskrepanz zwischen dem Aufwand und der Genauigkeit bei der Schnittgrößenermittlung infolge äußerer Lasten und jener infolge Zwang besteht. Obwohl bei Zwang die Einwirkungsseite genauer vorhersagbar ist, sind die Berechnungsverfahren in der Praxis eher überschlägiger Natur. Selbst wenn dies oft mit dem streuenden Charakter der Rißbildung gerechtfertigt wird, spielt sicher das Fehlen entsprechender, allgemein verfügbarer elektronischer Rechenhilfsmittel eine wesentliche Rolle.

Da beim frühen Temperaturzwang der Baustoff die Einwirkung verursacht, ist eine Voraussetzung des (semi-)probabilistischen Sicherheitskonzeptes, nämlich die Unabhängigkeit von Einwirkung und Widerstand, nicht mehr gegeben [113]. Anders ausgedrückt: Die Betonrezeptur beeinflusst den Temperaturverlauf und somit die Einwirkung, zugleich aber auch die Werkstoffeigenschaften auf der Widerstandsseite. Dies erschwert die Festlegung eines schlüssigen Sicherheitskonzeptes, so daß in dieser Arbeit die Auffassung vertreten wird, daß die Streuung des Materials durch Grenzbeurteilungen auf Grundlage deterministischer Rechenverfahren berücksichtigt werden sollte.

1.3 Ziel und Inhalt dieser Arbeit

1.3.1 Thema der Arbeit

Die vorliegende Arbeit hat die numerische Simulation von Hydratationsvorgängen im Beton aus thermomechanischer Sicht zum Inhalt. Die Thermomechanik stellt dabei die Beschränkung auf zeitlich veränderliche, thermische und mechanische, also im weitesten Sinne physikalische Vorgänge dar, wohingegen chemische Prozesse nicht simuliert, sondern in ihrer integralen Auswirkung in Form empirischer Ansätze berücksichtigt werden. Der Schwerpunkt der Arbeit liegt in der rechnerischen Abbildung des Materialverhaltens. Es sollen Rechenmodelle erarbeitet werden, die eine Vorhersage von hydratationsbedingten Spannungen und Rißbreiten erlauben.

1.3.2 Vorgehen

Nach der Einführung in diesem Kapitel beschreibt Kapitel 2 die rechnerischen Ansätze zur Modellierung der Wärmefreisetzung und des Hydratationsfortschrittes. Bekannte Ansätze werden gegenübergestellt und hinsichtlich ihrer Anwendungsmöglichkeiten verglichen.

In Kapitel 3 werden die Werkstoffparameter von Beton, welche für die Berechnung der Temperatur-, Spannungs- und Rißgeschichte bei Bauteilen aus jungem Beton erforderlich sind, dargestellt. Der Schwerpunkt liegt auf der Veränderlichkeit der Parameter während der Hydratation, wobei im wesentlichen bekannte Ansätze beschrieben werden. Dort, wo aus der Literatur keine Angaben zu entnehmen waren, wie z. B. für die Entwicklung der Bruchenergie, werden neue Ansätze basierend auf veröffentlichten Versuchsergebnissen vorgeschlagen.

Über das Themengebiet des hydratisierenden Betons hinausgehend wird in Kapitel 4 ein verallgemeinertes viskoelastisches Stoffgesetz für alternde Materialien abgeleitet. Zunächst erfolgt dazu die Darstellung der grundsätzlichen Unterschiede im elastischen Verhalten von erhärtenden und aufweichenden Materialien, welche mit hyperelastischen bzw. hypoelastischen Stoffgesetzen beschrieben werden können. Daraus wird ein verallgemeinertes nichtlinear-elastisches Stoffgesetz entwickelt, welches die beiden bekannten Phänomene als Grenzfälle enthält. Die Verallgemeinerung ermöglicht es, das gleichzeitige Auftreten von Erhärtung und Schädigung zu beschreiben, was z. B. bei jungem Beton, der hohen Temperaturen ausgesetzt ist, auftreten kann. Außerdem ergeben sich algorithmische Vorteile, da in einem allgemeinen Rechenprogramm eine Fallunterscheidung für Schädigungs- und Erhärtungsphänomene entfallen kann.

Das beschriebene Vorgehen wird analog angewandt, um auf ebensolche Weise zu einem verallgemeinerten Stoffgesetz zu gelangen, das neben den nichtlinear-elastischen auch die viskosen Dehnungen, also Kriechen und Relaxation bei kombinierter Erhärtung und Schädigung, beschreibt. Das viskoelastische Stoffgesetz wird konsistent aus der Definition der Kriechfunktion hergeleitet und in Dehnungsraten formuliert. Da die Erweiterung auf Schädigungsvorgänge über das eigentliche Thema hinausgeht, erfolgt im Rahmen dieser Arbeit lediglich die theoretische Ableitung. Die Formulierung wurde bisher weder in ein FE-Programm eingebaut noch durch Versuche verifiziert, da momentan noch keine entsprechenden Schädigungskonzepte für jungen Beton vorliegen. Deshalb stellt dieses Stoffgesetz eine theoretische Grundlage für weiterführende Forschungsarbeiten auf dem Gebiet der Schädigungstheorie junger Betonkonstruktionen dar.

Kapitel 5 behandelt die Grundlagen der Berechnung von Temperatur-, Hydratations- und Verschiebungsfeldern mit der Finite-Element-Methode. Da es sich größtenteils um bekannte Verfahren

handelt, erfolgt die Darstellung in knapper Form. Ausführlicher werden die Erweiterungen zur Berechnung instationärer Vorgänge im erhärtenden Beton dargestellt.

Für die realistische und zugleich normenkonforme Berechnung von Rißbreiten mit der FEM wird in Kapitel 6 ein diskretes Bewehrungs-Riß-Element entwickelt. Das Stoffgesetz wird aus dem Rißgesetz nach Schießl [187] abgeleitet, so daß der Zusammenhang zwischen Stahlspannung im Riß und Rißöffnung auf Höhe der Bewehrung den Grundlagen der derzeit gültigen Normen entspricht. Dies ermöglicht eine konsistente Ermittlung der rißbreitenbeschränkenden Bewehrung mit der FEM.

Kapitel 7 enthält die für die Anwendung der zuvor beschriebenen Grundlagen notwendigen Erläuterungen zum Mechanismus der Rißbildung und zum Rechengang. In diesem Zusammenhang wird auch die Auswirkung und die Modellierung einer kontinuierlichen Verformungsbehinderung durch Bodenreibung auf das Rißgeschehen erläutert. Die exemplarische Anwendung der vorgestellten Modellierung von Hydratationsprozessen zeigt Kapitel 8 am Beispiel von Bodenplatten weißer Wannen. Durch Variation von Rechenparametern werden Einflüsse auf das Tragverhalten untersucht.

Das abschließende Kapitel 9 faßt die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit zusammen und gibt Anregungen für weitere Forschungen. Der Anhang enthält einige Ergänzungen zu den einzelnen Kapiteln, die nicht unmittelbar für das Verständnis erforderlich sind, jedoch für weitergehende Untersuchungen von Interesse sein dürften, wie z.B. die inkrementelle Form der in Kapitel 4 differentiell formulierten Stoffgesetze.

1.3.3 Voraussetzungen der angestellten Untersuchungen

Hinsichtlich des Werkstoffes gelten die vorgestellten Modelle für Normalbeton mit einem Wasserzementwert größer 0.4 und schlaffer Bewehrung. Hochleistungsbetone mit geringerem Wasserzementwert erfordern die Berücksichtigung des chemischen Schwindens und somit des aktuellen Feuchtezustandes, der in dieser Arbeit nicht berechnet wird.

Bezüglich der Temperaturberechnung gelten die in Kapitel 5 aufgeführten Voraussetzungen. Insbesondere werden die Gültigkeit des Fourierschen Leitgesetzes und langsam ablaufende Prozeßgeschwindigkeiten unterstellt. Die verschiedenen Stufen der zweiseitigen Kopplung zwischen Hydratationsprozeß und mechanischer Beanspruchung erläutert Kapitel 5 mit den zugehörigen Vereinfachungen.

Unter der Annahme kleiner Verformungen wird geometrisch linear gerechnet, was bei den betrachteten Problemstellungen keine Einschränkung darstellt. Während konkrete Berechnungen ausschließlich an Scheibenmodellen erfolgen, können die theoretischen Ausführungen auch auf andere Systeme übertragen werden. Die Werkstoffbeschreibung des Betons erfolgt homogen und bis auf Rißzustände isotrop. Da bei den betrachteten Bauteilen die auftretenden Spannungen betragsmäßig klein gegenüber der Betondruckfestigkeit sind, wird bei Kurzzeitbeanspruchungen von einem linear-elastischen Verhalten im Druckbereich und im Zugbereich bis zum Riß ausgegangen. Für das zeitabhängige Verformungsverhalten kann bei den im Vergleich zur Betondruckfestigkeit betragsmäßig kleinen Spannungen die Gültigkeit der linearen Viskoelastizitätstheorie unterstellt werden, was gleichbedeutend mit der Annahme des Boltzmannschen Superpositionsprinzips für die viskosen Dehnungsanteile ist.

Kapitel 2

Hydratationskinetik

2.1 Einleitung

Eine wirklichkeitsgetreue Modellierung der Hydratationsvorgänge in Betonbauteilen ist die wesentliche Voraussetzung, um realistische Aussagen über Spannungen und Rißbreiten treffen zu können. Deshalb werden im folgenden zunächst die nötigen Grundlagen aus der Baustoffkunde, soweit für das Verständnis der weiteren Abschnitte nötig, zusammengefaßt.

Forschungsarbeiten aus Bauchemie und Baustoffkunde geben detaillierte Beschreibungen der chemischen Vorgänge bei der Hydratation. Da Abschnitt 2.2 nur einen Überblick als Grundlage zur Berechnung der Hydratationstemperaturen gibt, wird für weiterführende Angaben auf die Literatur verwiesen, wobei insbesondere die Dissertation von Breugel [32] zu nennen ist.

Den Ausgangspunkt des Hydratationsvorganges bildet der eingebaute Frischbeton, der durch Zusammensetzung und Einbautemperatur den weiteren Ablauf wesentlich bestimmt. Erst Monate später erreicht der erhärtete Beton seine endgültigen Eigenschaften, die maßgeblich von den Erhärtingsbedingungen abhängen. Eine analytische Beschreibung muß den gesamten Zeitraum vom Stadium des jungen, erst wenige Stunden alten Betons bis hin zum asymptotischen Übergang zu den endgültigen Eigenschaften abdecken.

Eine Schwierigkeit besteht darin, eine adäquate Beschreibung der zeitlich veränderlichen Eigenschaften zu finden, die der Abhängigkeit von Betonrezeptur und Erhärtingsbedingungen Rechnung trägt. Zweckmäßigerweise werden deshalb alle im Verlauf des Abbindevorganges veränderlichen Größen in Abhängigkeit eines noch zu definierenden Hydratationsgrades dargestellt, um so eine möglichst allgemeingültige Aussage zu erhalten. Für die Umsetzung in Rechenprogramme sind demnach Ansätze für den Hydratationsfortschritt erforderlich, die den Zusammenhang zwischen Realzeit, Betoneigenschaften und Erhärtingsbedingungen herstellen. Solche Ansätze werden in Abschnitt 2.3 behandelt und in Abschnitt 2.4 hinsichtlich ihrer Anwendung innerhalb einer statischen Berechnung diskutiert.

2.2 Chemische Vorgänge bei der Hydratation

2.2.1 Entstehung der Hydratationswärme

Beim Brennen des Zementes werden die einzelnen Klinkerphasen auf ein energetisch höheres Niveau gebracht. Beim Abbindevorgang wird in einem exothermen Reaktionsprozeß die Hydratations-

wärme freigesetzt, so daß sich das Hydratationsprodukt auf einem energetisch niedrigeren, stabileren Niveau befindet [31]. Die bis zur abgeschlossenen Hydratation freiwerdende Wärmemenge wird als Hydrationswärme bezeichnet. Sie hängt im wesentlichen von der chemischen Zusammensetzung des Zementklinkers ab. Für den Temperaturverlauf im Beton ist aber nicht nur die Größe, sondern auch die zeitliche Entwicklung der Hydrationswärme entscheidend.

2.2.2 Hydrationschemie

Maßgebend für die Wärmeentwicklung sind die Menge und Art des verwendeten Bindemittels. Unter Zementhydratation werden alle Prozesse verstanden, die bei der Reaktion des Zementes mit Wasser ablaufen. Dabei findet eine Umwandlung der Klinkerminerale in Hydratphasen (CSH-Phasen) statt, wobei sich die Reaktionsgeschwindigkeit der einzelnen Klinkerphasen stark unterscheidet. Sehr anschaulich zeigen zwei Abbildungen von Richartz [169] und Wischers [239] die Reaktionsvorgänge bei der Hydratation (Abb. 2-1 und Abb. 2-2).

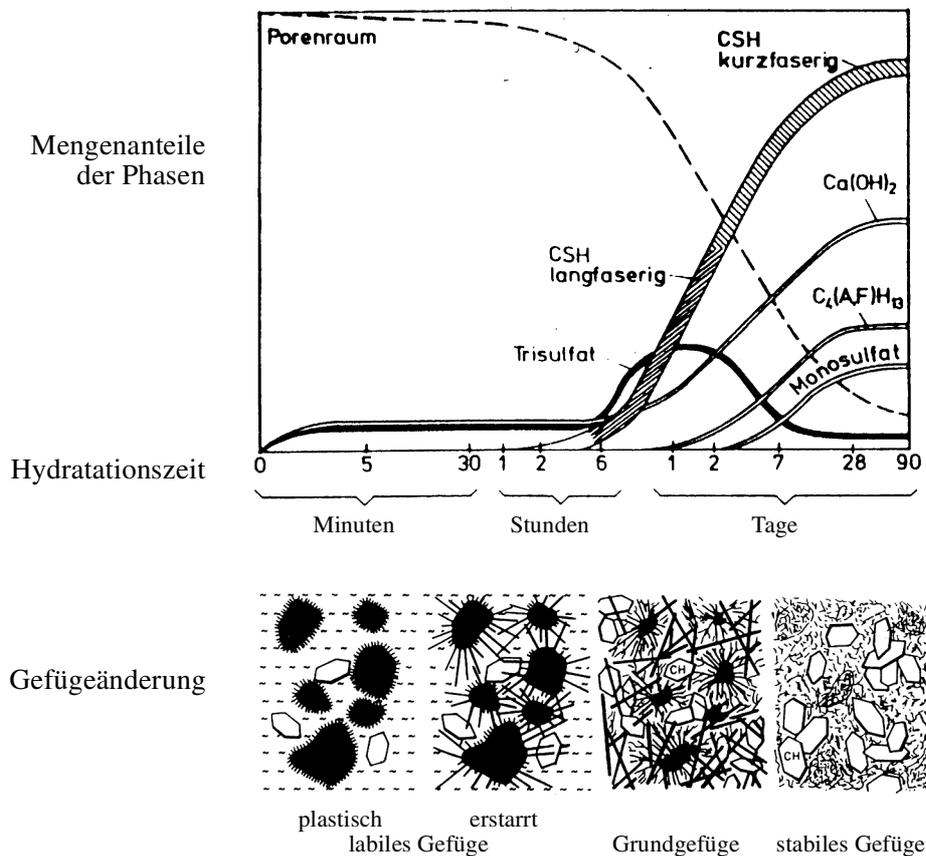


Abb. 2-1: Entwicklung der Hydratphasen und des Gefüges (schematisch nach Richartz [169]).

Czernin [46] gibt die Hydrationswärme und die Gewichtsanteile der einzelnen Klinkerphasen an (Tabelle 2.1). Die gesamte Wärmemenge, die vom Zement während der Hydratation freigesetzt wird, kann als Summe der freigesetzten Reaktionsenergien der Phasen nach Gleichung (2.1) berechnet werden [193]. Die Beiwerte a bis d wurden von Czernin [46] für verschiedene Altersstufen entsprechend Tabelle 2.2 angegeben.

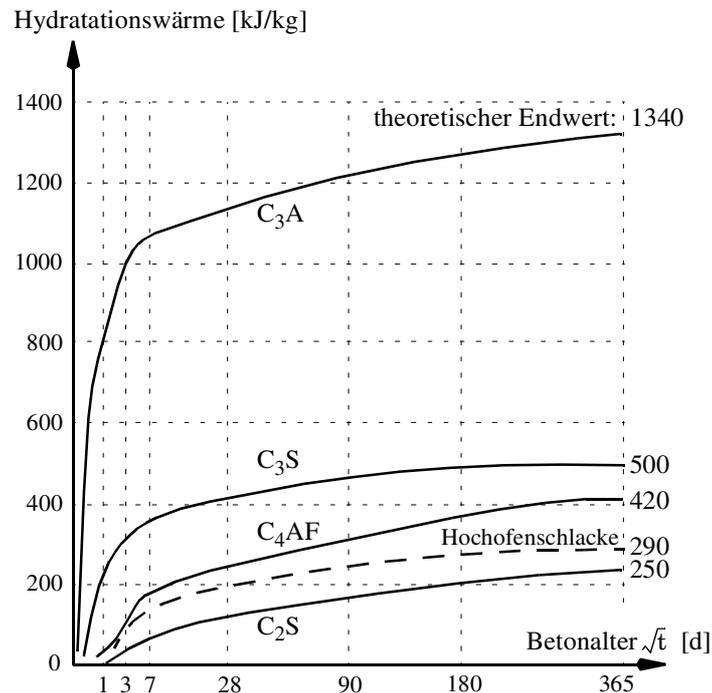


Abb. 2-2: Hydratationswärmeentwicklung der Klinkerphasen und der Hochofenschlacke (nach [126, 239]).

$$Q_Z(t) = a \cdot (\% C_3S) + b \cdot (\% C_2S) + c \cdot (\% C_3A) + d \cdot (\% C_4AF) \quad [\text{kJ/kg}] \quad (2.1)$$

| Klinkerphase | Hydratationswärme Q [kJ/kg] | Anteil im Portlandzementklinker [Massen-%] | |
|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------|
| | | Mittelwert | (Minimal - Maximalwert) |
| Tricalciumsilicat C_3S | 500 | 63% | (45% - 80%) |
| Dicalciumsilicat C_2S | 250 | 16% | (0 - 32%) |
| Tricalciumaluminat C_3A | 870 (in PZ mit SO_3 : 1340) | 11% | (7% - 15%) |
| Calciumaluminatferrit $C_4(A,F)$ | 420 | 8% | (4% - 14%) |
| Freies Calciumoxid CaO | 1150 | 1% | (0.1% - 3%) |
| Freies Magnesiumoxid MgO | 840 | 1.5% | (0.5% - 4.5%) |

Tabelle 2.1: Hydratationswärme und Anteil der Klinkerphasen im Portlandzementklinker [46, 126, 193].¹

Diese Beschreibung der Wärmeentwicklung ist als Grundlage für Rechenprogramme nur bedingt geeignet, da eine lineare Interpolation zwischen diesen Werten dem tatsächlichen Verlauf nur ungenügend entspricht. Deshalb versucht man, geeignete mathematische Ansatzfunktionen aufzustellen,

1. Davon stark abweichende Angaben von Yamazaki et al. [245] deuten darauf hin, daß sich diese Tabelle, was die Massenanteile in Portlandzementklinker anbelangt, nicht ohne weiteres verallgemeinern läßt.

die dem gemessenen Verlauf möglichst gut entsprechen. Auf diese Ansätze wird in Abschnitt 2.3 näher eingegangen.

| Faktor | Alter [Tagen] | | | | | | je Gew.-% |
|--------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-------------------|
| | 3 | 7 | 28 | 90 | 180 | 360 | |
| a | 3.4 | 3.8 | 4.2 | 4.6 | 5.0 | 5.0 | C ₃ S |
| b | 0.4 | 0.8 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.5 | C ₂ S |
| c | 7.1 | 7.5 | 8.0 | 8.4 | 8.8 | 9.2 | C ₃ A |
| d | 0.8 | 1.3 | 1.7 | 2.1 | 2.5 | 2.9 | C ₄ AF |

Tabelle 2.2: Wärmeentwicklung in [kJ/kg] je Gew.-% der Klinkermineralien (bei 23°C, w/z = 0,45) nach [46].

Im allgemeinen wird die gesamte produzierte Wärmeenergie nicht auf die Zementmasse bezogen, sondern auf das Betonvolumen. Die Umrechnung erfolgt mit dem Zementgehalt Z:

$$Q \text{ [kJ/m}^3\text{-Beton]} = Z \text{ [kg/m}^3\text{-Beton]} \cdot Q_Z \text{ [kJ/kg-Zement]} \quad (2.2)$$

Als Eingabe für die elektronische Berechnung der Temperaturfelder ist außerdem der zeitliche Verlauf der Wärmefreisetzung $q(t)$ anzugeben. Diese Größe ist nichts anderes als die zeitliche Ableitung der freigesetzten Wärmemenge und kann entsprechend aus dem experimentell ermittelten $Q(t)$ -Verlauf ermittelt werden:

$$q(t) = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}(t) \quad (2.3)$$

2.2.3 Experimentelle Ermittlung der Hydratationswärme

In der Regel wird die gesamte freiwerdende Hydratationswärmemenge einer Betonrezeptur experimentell bestimmt [213]. Bei der adiabatischen Kalorimetrie wird jeglicher Wärmeaustausch des Probekörpers mit der Umgebung verhindert, d.h. die gesamte freigesetzte Wärmemenge führt zu einer Temperaturerhöhung des Probekörpers. Einfacher durchzuführen sind Versuche mit semiadiabatischen Kalorimetern, bei denen ein gewisser, klein zu haltender Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet, der berücksichtigt wird. Bei ideal isothermen Versuchen wird die Temperatur des Probekörpers konstant gehalten. Die entstehende Wärme wird abgeführt und daraus die Reaktionswärme ermittelt. Dadurch verzögert sich der Verlauf der Wärmefreisetzung gegenüber dem adiabaten Verlauf, da bei geringeren Temperaturen die Reaktionsvorgänge verlangsamt ablaufen (Abb. 2-3). Prinzipiell eignen sich die Ergebnisse aller drei Versuchsarten zum Einsatz bei der Temperaturberechnung, wenn die Art und Weise der Versuchsdurchführung berücksichtigt wird. Wenn im Rahmen einer genauen Temperaturberechnung nicht nur die maximal freigesetzte Wärmemenge $Q(t \rightarrow \infty) = Q_\infty$, sondern auch der zeitliche Verlauf $Q(t)$ oder $q(t)$ in ein Rechenprogramm eingegeben wird, muß beachtet werden, ob das Programm den adiabaten oder isothermen Verlauf als Eingangswert verarbeitet, oder ob die Wärmefreisetzung unter Bauteilbedingungen, die im allgemeinen zwischen diesen Grenzfällen liegt, angegeben werden muß.

Koenders und van Breugel berichten in [110] über die Ergebnisse eines RILEM *Round Robin* Tests, bei dem acht Labors, versorgt mit Zement und Zuschlag aus derselben Lieferung und unter

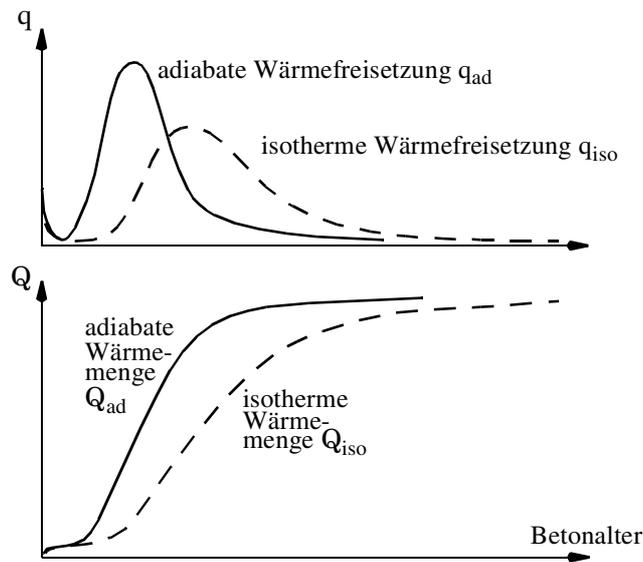


Abb. 2-3: Gegenüberstellung von adiabater und isothermer Wärmeentwicklung.

genauer Vorgabe des Mischungsverhältnisses und der Ausgangstemperatur, den adiabaten Temperaturverlauf messen sollten. Sowohl der ermittelte zeitliche Verlauf als auch der Endwert der adiabaten Temperaturerhöhung streuten beträchtlich. Die Differenz zwischen dem Maximal- und Minimalwert für die Erwärmung lag bei 8.8°C , und die statistische Auswertung ergab eine Standardabweichung von 3.8°C , bzw. einen Streubereich für 90 % der Meßkurven von $\pm 6.2^{\circ}\text{C}$ bezogen auf den Mittelwert. Unter Baustellenbedingungen, bei Lieferungen unterschiedlicher Zementhersteller, bei weniger exakt definierbaren Randbedingungen ist zu erwarten, daß das tatsächliche Hydratationsgeschehen nur noch näherungsweise den Laborergebnissen entspricht. Dementsprechend geben auch Jonasson et al. einen „natürlichen Variationskoeffizient“ der Zementeigenschaften, der bei einem kommerziellen Produkt unvermeidbar ist, in der Größenordnung von 10 % an [103].

2.2.4 Hydratationsgrad

Da die Hydratationsgeschwindigkeit je nach Betonzusammensetzung und Ausgangssituation im Bauteil stark schwankt, ist die Zeit kein geeigneter Parameter zur Klassifizierung des Hydratationsfortschrittes. Deshalb wurden in der Literatur mehrere Vorschläge zur Definition eines dimensionslosen Beiwertes gemacht, der als Hydratationsgrad oder seltener als Reifegrad bezeichnet wird. Laube [126] und Huckfeldt [97] benutzen hierfür die Bezeichnung m . In dieser Arbeit wird jedoch die häufiger anzutreffende Bezeichnung α verwendet [32, 62, 63, 64, 135, 170, 193].

Die gebräuchlichste Definition, welche auch in dieser Arbeit zur Anwendung kommt, ist das Verhältnis der bis zum betrachteten Zeitpunkt t freigesetzten Hydratationswärmemenge zur gesamten Hydratationswärmemenge bei vollständig abgeschlossener Hydratation¹:

$$\alpha(t) = \frac{Q(t)}{Q_{\infty}} \quad 0 \leq \alpha(t) \leq 1 \quad (2.4)$$

1. Eine Zusammenstellung weiterer Definitionen findet sich z.B. in der Arbeit von Schöppel [193].

Ein Hydratationsgrad von $\alpha = 1$ wird theoretisch erst nach mehreren Jahren erreicht, bei sehr massigen Bauteilen eventuell erst nach Jahrzehnten.¹ Für praktische Anwendungen ist jedoch wesentlich früher ein Zustand erreicht, ab dem der Hydratationsprozess als quasi abgeschlossen betrachtet werden kann. Während allerdings bereits nach wenigen Tagen die Wärmeproduktion beinahe abgeschlossen ist, verändern sich die mechanischen Parameter wie E-Modul und Zug- bzw. Druckfestigkeit noch über einen wesentlich längeren Zeitraum hinweg (vgl. Kapitel 3).

2.3 Ansätze für den Hydratationsfortschritt

2.3.1 Empirische Ansätze

Wenn nicht bereits zum Zeitpunkt der statischen Berechnung experimentelle Ergebnisse zur Hydratationswärmeentwicklung oder Meßergebnisse an vergleichbaren ausgeführten Bauwerken vorliegen, muß ein rechnerischer Ansatz für den Ablauf der Hydratation als Berechnungsgrundlage gemacht werden. Die phänomenologische Beschreibung in Form von Versuchskurven wurde bereits in Abb. 2-3 beispielhaft dargestellt. Für die Umsetzung in ein Rechenprogramm ist jedoch eine mathematische Formulierung notwendig. Eine analytische Herleitung aus der Chemie ist bei einem strukturell derart inhomogenen Baustoff wie Beton auf absehbare Zeit noch nicht möglich, wobei einige Forschungsarbeiten bereits Ansätze in dieser Richtung zeigen [32, 110].

Deshalb ist es unumgänglich, aus Versuchsergebnissen empirische Formeln abzuleiten, die oft aufgrund ihrer Komplexität den Eindruck mathematischer Exaktheit vortäuschen. Der empirische Charakter bedingt, daß für ein und dieselbe Größe von verschiedenen Autoren mathematisch vollkommen unterschiedlich aufgebaute Ansätze angegeben wurden. Graphisch aufgetragen repräsentieren diese Ansätze häufig einen sehr ähnlichen Kurvenverlauf, zumindest innerhalb des oft nicht klar definierten Gültigkeitsbereiches.

2.3.2 Wirksames Betonalter

Um eine einheitliche Bezugsgröße in der Zeit für unterschiedliche Hydratationsbedingungen zu erhalten, wird ein fiktives *wirksames Betonalter* τ_w als Zeitgröße eingeführt. Diese Größe ist so definiert, daß ein isotherm ablaufender Prozeß bei $\vartheta = \text{konst.} = 20^\circ\text{C}$ nach der realen Zeit $t = \tau_w$ denselben Reaktionsfortschritt erreicht hat, wie der betrachtete beliebige Prozeß nach der Zeit $t \neq \tau_w$. Die Zeitachse wird also so verzerrt, daß die Zusammenhänge eines äquivalenten isothermen Referenzprozesses bei 20°C gelten. In der Regel wird τ_w als Integral einer temperaturabhängigen Reifefunktion $g(\vartheta)$ über die reale Zeit t definiert.

$$\tau_w(t) = \int_0^t g(\vartheta) dt \quad (2.5)$$

Am häufigsten werden die schon lange eingeführte Reifefunktion nach Saul und der neuere, auf der Arrhenius-Funktion beruhende Ansatz nach Freiesleben et al. verwendet [97]:

1. Price berichtet in [164], daß erst etwa 100 Jahre nach Fertigstellung des Hoover-Dams (1935) die Hydratationswärme vollständig an die Umgebung abgeführt sein wird.

$$\text{Saul [181]: } \tau_w = \frac{\vartheta + 10}{30} dt, \quad \vartheta \in [-10; 50][^\circ\text{C}] \quad (2.6)$$

$$\text{Freiesleben et al. [75]: } \tau_w = \exp \frac{A}{R} \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{273 + \vartheta} \right) dt, \quad \vartheta \in [-10; 80][^\circ\text{C}] \quad (2.7)$$

$$\text{Univ. Gaskonstante: } R = 8.3143 \text{ [J/(mol}\cdot\text{K)]}$$

$$\text{Aktivierungsenergie A: } A = A_0 + A_1(20 - \vartheta) \quad \text{für } \vartheta < 20^\circ\text{C}$$

$$A = A_0 \quad \text{für } \vartheta \geq 20^\circ\text{C}$$

$$A_0 = 33500 \text{ J/mol, } A_1 = 1470 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$$

In allen Ansätzen wird die Reifefunktion für $\vartheta \equiv 20^\circ\text{C}$ zu Eins, so daß $\tau_w = t$ gilt. Für Temperaturen $\vartheta \neq 20^\circ\text{C}$ weichen die Ansätze mehr oder weniger voneinander ab (vgl. Abschnitt 2.3.4.3). Der einfache Ansatz nach Saul ist am weitesten verbreitet. Laube favorisiert dagegen in seiner Dissertation [126] den Ansatz von Freiesleben et al. wegen seines großen Gültigkeitsbereiches für Temperaturen von -10°C bis 80°C . Der Ansatz von Freiesleben et al. kann über die Aktivierungsenergie A an die Betonrezeptur angepaßt werden. Die bei Gleichung (2.7) angegebene abschnittsweise Definition für A kann jedoch im Regelfall übernommen werden [126].

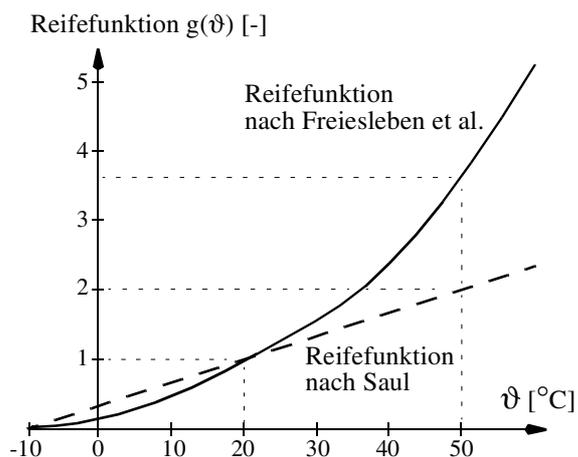


Abb. 2-4a: Temperaturabhängigkeit der Reifefunktionen nach Saul und Freiesleben et al.

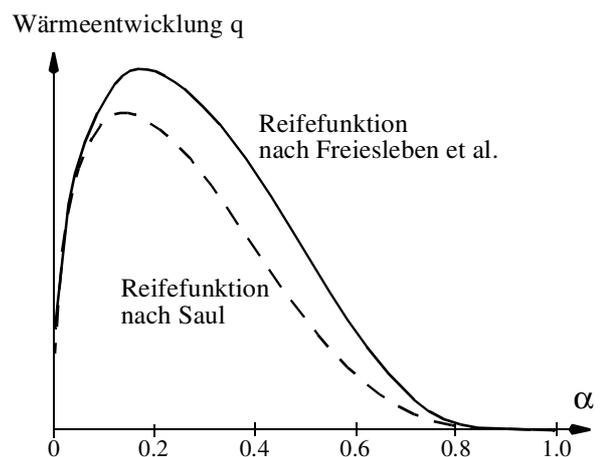


Abb. 2-4b: Adiabate Wärmefreisetzung für verschiedene Reifefunktionen.

Abb. 2-4a zeigt die Temperaturabhängigkeit der vorgestellten Reifefunktionen. Man erkennt, daß beim Ansatz nach Freiesleben et al. der hohe Temperaturbereich stärker gewichtet wird. Konkret heißt das, daß bei 50°C nach dem Ansatz von Saul die Hydratationsgeschwindigkeit gegenüber dem Referenzprozeß bei 20°C verdoppelt ist, während nach Freiersleben et al. die Reaktion um den Faktor 3.6 schneller abläuft. In Abb. 2-4b sieht man die Auswirkung dieser unterschiedlichen Gewichtung am Beispiel eines adiabaten Prozesses mit einer Starttemperatur von 20°C . Die Wärmefreisetzung, die für beide Ansätze über dem Hydratationsgrad aufgetragen ist, erreicht beim Ansatz nach Freiesleben et al. einen größeren Maximalwert, da sich die Temperaturen und die Wärmefreisetzung stärker beeinflussen. Würde man die Kurven über die Zeit auftragen, würden sie denselben Flächeninhalt aufweisen, da die gesamte Wärmemenge eine Materialkonstante ist:

$$Q_{\infty} = Q(t = \infty) = \int_0^{\infty} q dt \quad (2.8)$$

Da der Hydratationsgrad nichtlinear mit der Zeit verknüpft ist, geht die Eigenschaft der Flächen-gleichheit bei dieser Bezugsgröße verloren. Gleichung (2.8) bedeutet aber, daß bei der Nachrech-nung eines adiabaten Versuches die gleiche Endtemperatur erreicht wird. Bei nicht adiabaten Ver-hältnissen ergibt der Ansatz nach Saul in der Regel eine geringere Maximaltemperatur.

In Abschnitt 2.3.4 werden weitere Reifefunktionen, die in Zusammenhang mit speziellen Hydratationsansätzen aus Abschnitt 2.3.3 vorgeschlagen wurden, mit den hier vorgestellten Funktionen verglichen. Ein für Schlackenbetone erweiterter Arrhenius-Ansatz wurde von Kishi und Maekawa [109] vorgeschlagen. Soll auch der Einfluß der hygroskopischen Verhältnisse auf die Reife berück-sichtigt werden, so kann Gleichung (2.7) mit einem Faktor, der abhängig vom Feuchtepotential ist, erweitert werden [171].

2.3.3 Ansätze für den zeitlichen Verlauf der Hydratation

2.3.3.1 Allgemeines

Wie bereits in Abschnitt 2.2.4 ausgeführt, ist für den Einsatz in Finite-Element-Programmen fol-gende Definition des Hydratationsgrades zweckmäßig:

$$\alpha(t) = \frac{Q(t)}{Q_{\infty}} = \frac{\Delta\vartheta^{\text{ad}}(t)}{\Delta\vartheta_{\infty}^{\text{ad}}} \quad \text{mit } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (\text{vgl. Gl. (3.6)}) \quad (2.9)$$

Der Hydratationsgrad α ist somit das Verhältnis der Wärmemenge, die bis zum betrachteten Zeit-punkt freigesetzt wurde, zur gesamten Hydratationswärmemenge und kann experimentell durch adiabate Temperaturmessung als Funktion der Zeit bestimmt werden. Für die Umsetzung in ein Rechenprogramm gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. Vom Benutzer wird die Eingabe des q -Verlaufs als Funktion der Zeit verlangt. In diesem Fall wird programmintern mit Gleichung (2.9) der aktuelle Hydratationsgrad zur Bestimmung der Materialparameter ermittelt. Bei dieser Möglichkeit muß klar definiert sein, ob der $q(t)$ -Verlauf unter adiabaten, isothermen oder Bauwerksbedingungen einzugeben ist. Im letzteren Fall kann eine Berücksichtigung unterschiedlicher Hydratationsgeschwindigkeiten im Bauteil nur manuell erfolgen. Der Benutzer kann den q -Verlauf
 - a) aus Versuchen oder
 - b) durch Auswertung einer Ansatzfunktion erhalten.
2. Im Programm wird ein analytischer Ansatz für den zeitlichen Verlauf der Hydratation implemen-tiert. Dies setzt voraus, daß der Ansatz die Anforderungen des Benutzers erfüllt, und daß die benötigten Eingangsparameter des Ansatzes bekannt sind. In diesem Fall wird Gleichung (2.9) programmtechnisch nicht zur Bestimmung von α herangezogen, sondern zur Bestimmung der aktuellen Wärmeproduktion, die als Zufluß in die Temperaturfeldberechnung eingeht.

$$q = \dot{Q} = \frac{d}{dt}(Q_{\infty} \cdot \alpha) = Q_{\infty} \cdot \dot{\alpha} \quad (2.10)$$

In den Fällen 1b und 2 – also stets, wenn keine Versuchskurven zur Verfügung stehen – muß der Hydratationsgrad bzw. die Wärmefreisetzung über empirische, auf Versuchen basierende Ansätze errechnet werden. Hierzu haben eine Reihe von Forschern bis in jüngere Zeit unterschiedliche Funktionen vorgeschlagen, die im folgenden verglichen werden.

2.3.3.2 Ansatz nach Wesche

Schöppel gibt in seiner Dissertation [193] einen relativ einfachen Ansatz nach Wesche [236] an, der eine gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen zeigt. Aus der ursprünglichen Form

$$Q(t) = Q_{\infty} \cdot \exp(a \cdot t^b) \quad (2.11)$$

ergibt sich folgender implizite Ansatz für α in Abhängigkeit des tatsächlichen Betonalters t [h] und der Modellparameter a und b nach Tabelle 2.3:

$$\alpha = \exp(a \cdot t^b) \quad (2.12)$$

| Zement (DIN) | | $Q_{Z,\infty}$ [kJ/kg] | a | b |
|-----------------|------------------|------------------------|-------|-------|
| Bezeichnung neu | Bezeichnung alt | | | |
| 52,5 42,5R | Z 55 Z 45 F | 380 | -11.1 | -1.00 |
| 42,5 32,5R | Z 45 L Z 35 F | 295 | -43.3 | -1.35 |
| 32,5 | Z 35 L | 216 | -74.8 | -1.50 |

Tabelle 2.3: Modellparameter a und b nach [193].

Auch die Wärmefreisetzungsrate $q(t)$ kann somit in analytischer Form angegeben werden:

$$q(t) = \frac{dQ}{dt} = Q_{\infty} \cdot a \cdot b \cdot t^{b-1} \cdot \exp(a \cdot t^b) \quad (2.13)$$

Geht man von gebräuchlichen Betonrezepturen mit Portlandzement aus, so können Richtwerte für die Wärmeentwicklung in den Standardbetonen aufgestellt werden (Anhang A.3). In Abb. 2-5 ist der entsprechende zeitliche Verlauf von $Q(t)$ und $q(t)$ in den ersten 100 Stunden angegeben. Aus dem Vergleich mit gemessenen Werten für einen B25 [120] sieht man, daß der Ansatz brauchbare Werte liefert.

2.3.3.3 Ansatz nach Byfors

Byfors schlägt in [36] folgenden Ansatz mit den Modellparametern a ($4.6 \leq a \leq 22.0$) und b ($1.2 \leq b \leq 2.5$) vor:

$$\alpha = \exp(-a \cdot \ln(\tau_w)^{-b}) \quad (2.14)$$

Mehrere Forscher haben die mathematische Form des Ansatzes von Byfors aufgenommen und modifizierte Ansätze vorgeschlagen. So verwendet z.B. Bažant eine leicht modifizierte Form, bei

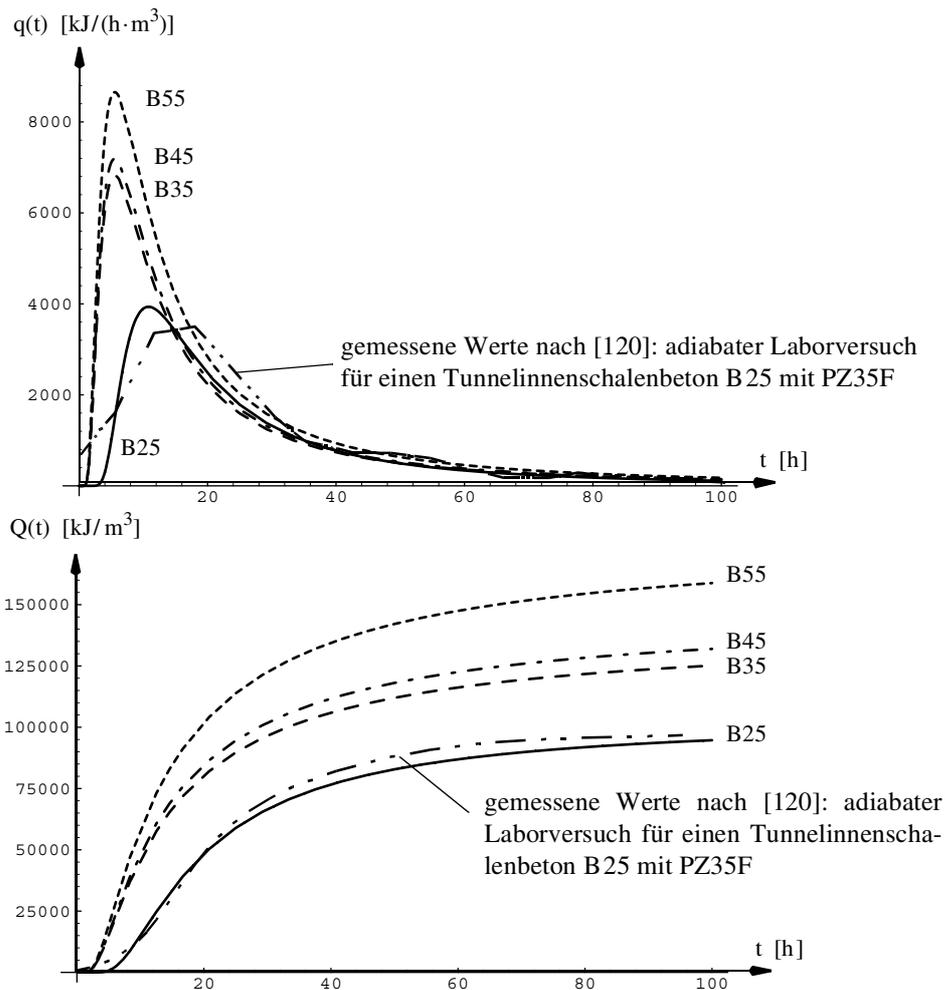


Abb. 2-5: Adiabate Wärmeentwicklung und Wärmefreisetzung verschiedener Normalbetone nach dem Ansatz von Wesche im Vergleich mit den Meßwerten nach [120].

der auch die Abhängigkeit vom Feuchtegehalt berücksichtigt werden kann [16, 87]. Abb. 2-6a zeigt die gute Übereinstimmung zwischen Experiment und dem Byfors-Ansatz.

2.3.3.4 Ansatz nach Jonasson

Auch der Ansatz, den Jonasson in [101] vorgeschlagen hat, stellt eine Erweiterung der Exponentialfunktion von Byfors dar. Insbesondere in den neueren Forschungsarbeiten der TU Braunschweig wird dieser Ansatz favorisiert [83, 97, 126, 155]:

$$\alpha = \exp b \cdot \ln \left(1 + \frac{\tau_w}{\tau_k} \right)^a \quad (2.15)$$

- mit τ_w wirksames Betonalter (siehe Abschnitt 2.3.2)
 τ_k Zeitkonstante (τ_w und τ_k sind in der gleichen Einheit einzusetzen)
 a und b Modellparameter

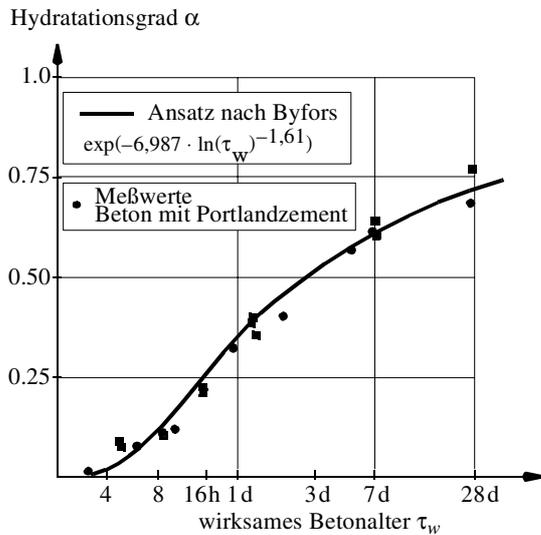


Abb. 2-6 a: Hydratationsansatz nach Byfors: Gl. (2.14) (nach [101], aus [126]).

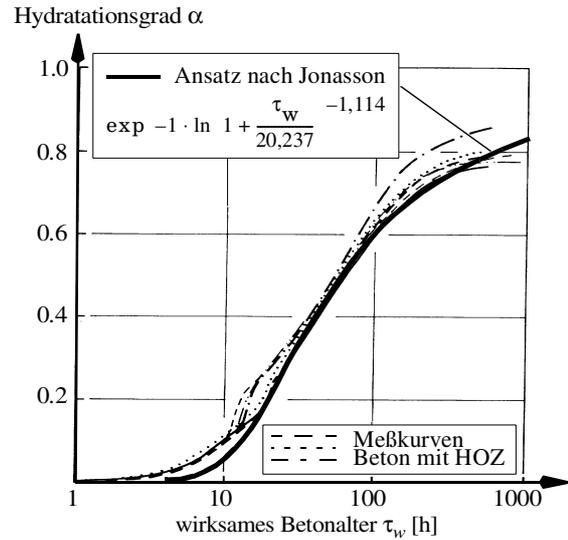


Abb. 2-6b: Hydratationsansatz nach Jonasson: Gl. (2.15) (aus [155]).

τ_k , a und b sind experimentell zu bestimmende Modellparameter, durch die der Ansatz gut an gemessene Verläufe für α angepaßt werden kann. Der maßgebliche Vorteil dieses Ansatzes liegt aber nicht in der etwas besseren Anpassungsfähigkeit gegenüber dem Byfors-Ansatz, sondern in der Tatsache, daß die Formel dimensionsrein ist, da τ_k in die verwendete Zeiteinheit umgerechnet werden kann, und die Parameter a und b dimensionslos und unabhängig von der Zeiteinheit sind. Die sehr gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen zeigt Abb. 2-6b. Gutsch [83] stellt erste Ansätze für eine empirische Formulierung der Modellparameter in Abhängigkeit der Betonzusammensetzung und der Frischbetontemperatur vor.

Jonasson et al. schlagen in [103] weiterhin einen Ansatz für das wirksame Betonalter vor, der eine Modifikation der Reifefunktion nach Freiesleben et al. darstellt. Die Modifikation besteht in einer Formulierung der Aktivierungsenergie, die zwar weiterhin temperaturabhängig ist, jedoch ohne Fallunterscheidung auskommt:

$$\tau_w = \exp 5300 \frac{30}{\vartheta + 10}^{0,45} \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{273 + \vartheta} \right) dt \quad (2.16)$$

Im Gegensatz zum Ansatz nach Freiesleben et al. (Gl. (2.7)) ist diese Reifefunktion experimentell noch nicht abgesichert. Sie liefert im Bereich hoher Temperaturen Werte, die zwischen den Reifefunktionen nach Saul und nach Freiesleben et al. liegen.

2.3.3.5 Ansatz nach Marx

Marx gibt in seiner Dissertation [136] folgende Exponentialfunktion als Ansatz für α an:

$$\alpha = 1 - \exp - \frac{t}{t_b}^c \quad (2.17)$$

- mit c Streckungsparameter $0 \leq c \leq 1$ [-]
 t reales Betonalter
 t_b Geschwindigkeitsfaktor $20 \leq t_b \leq 80$ [h]
 (t und t_b sind in der gleichen Einheit einzusetzen)

Dieser Ansatz ist wie der Ansatz nach Jonasson einheitenrein mit der Einschränkung, daß t_b in der verwendeten Zeiteinheit eingesetzt wird. Die durch Gleichung (2.17) beschriebene Funktion ist jedoch nicht geeignet, um den s-förmigen Verlauf bei Hydratationsbeginn abzubilden (vgl. Abb. 2-7). Derselben Einschränkung unterliegt auch der analog aufgebaute Ansatz, der von der Japan Society of Civil Engineering empfohlen wird [246].

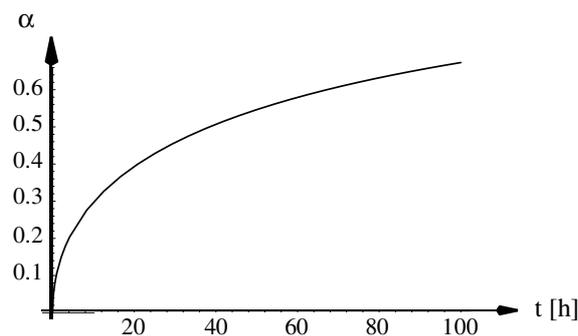


Abb. 2-7: Ansatzfunktion für α nach Marx (Gleichung (2.17)).

2.3.3.6 Ansatz nach Kirchner

Kirchner geht in [108] von den tabellierten Hydratationswärmewerten für Zement nach DIN 1164 [53] aus. Für die zeitliche Entwicklung der Hydratationswärme wählt Kirchner einen Ansatz, den er an die Stützstellen nach Tabelle 2.4 anpaßt:

$$Q(t) = Z \cdot Q_{Z, \infty} \cdot (1 - \exp(-a\sqrt{t})) \quad (2.18)$$

Ansatz für $\alpha(t)$

| Zementfestigkeitsklasse | | Hydratationswärme Q_Z in [kJ/kg] nach | | | |
|-------------------------|------------------|-----------------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| neu | alt | 1 Tag | 3 Tagen | 7 Tagen | 28 Tagen |
| 32,5 | Z 35 L | 60 - 170 | 125 - 250 | 150 - 300 | 210 - 380 |
| 32,5R 42,5 | Z 35 F Z 45 L | 125 - 210 | 210 - 340 | 275 - 380 | 300 - 420 |
| 42,5R 52,5 | Z 45 F Z 55 L | 210 - 275 | 300 - 360 | 340 - 380 | 380 - 420 |

Tabelle 2.4: Hydratationswärme (Lösungswärme) deutscher Zemente bestimmt nach DIN 1164, Teil 8 (Richtwerte nach [90], Tabelle 2.7).

Dieser Ansatz ist identisch mit dem Ansatz von Marx (siehe Abschnitt 2.3.3.5), wenn in Gleichung (2.17) $c = 0.5$ und $t_b^{-c} = a$ gesetzt wird. Auch die Kolmogoroff-Erofeev-Gleichung aus [32] entspricht diesem Ansatz. Kirchner gibt für den Modellparameter a folgende Beziehung an:

$$a = \frac{1}{\sqrt{168}} \cdot \ln \left(1 - \frac{Q_{Z,7}}{Q_{Z,\infty}} \right) < 0 \quad ,$$

wobei die gesamte Hydratationswärme $Q_{Z,\infty}$, da nicht aus Tabelle 2.4 ablesbar, durch Extrapolation ermittelt wird:

$$Q_{Z,\infty} \cong \frac{Q_{Z,7}^2}{2Q_{Z,7} - Q_{Z,28}} \quad (2.19)$$

Dies entspricht folgendem Ansatz für α :

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \exp \left[\sqrt{\frac{t}{168}} \cdot \ln \left(1 - \frac{Q_{Z,7}}{Q_{Z,\infty}} \right) \right] = 1 - \left(1 - \frac{Q_{Z,7}}{Q_{Z,\infty}} \right)^{\sqrt{t/168}} = \\ &= 1 - \left(1 - \frac{2Q_{Z,7} - Q_{Z,28}}{Q_{Z,7}} \right)^{\sqrt{t/168}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

mit $Q_{Z,7}, Q_{Z,28}$ Hydratationswärme des Zementes nach 7 bzw. 28 Tagen aus Tabelle 2.4
 t reales Betonalter [h]

Daraus ergibt sich durch Ableitung nach der Zeit der folgende Ansatz für $q(t)$ bei isothermen Verhältnissen:

$$q_{\text{iso}}(t) = \dot{Q}_{\text{iso}} = Z \cdot Q_{Z,\infty} \cdot \frac{-a}{2\sqrt{t}} \cdot \exp(a\sqrt{t}) \quad \text{für } \vartheta = 20^\circ\text{C} = \text{konst.} \quad (2.21)$$

Nun setzt Kirchner in diese Gleichung den nach $a \cdot \sqrt{t}$ aufgelösten Ansatz nach Gleichung (2.18) ein

$$a \cdot \sqrt{t} = \ln(1 - \alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{Q(t)}{Z \cdot Q_{Z,\infty}} \quad (2.22)$$

und substituiert somit die Zeit durch α :

$$q_{\text{iso}}(\alpha) = -Z \cdot a^2 \cdot \frac{1 - \alpha}{2 \cdot \ln(1 - \alpha)} \cdot Q_{Z,\infty} \quad (2.23)$$

Wenn die Erhärtungstemperatur nicht konstant 20°C beträgt, wird nach Breitenbücher [31] eine Verdoppelung der Hydratationsgeschwindigkeit bei einer Temperaturerhöhung um 14 K angenommen. Es ergibt sich somit eine Multiplikation mit einer temperaturabhängigen Funktion $g(\vartheta)$:

$$g(\vartheta) = 2^\beta = 2^{\frac{\vartheta - 20}{14}} \quad (2.24)$$

Daraus errechnet sich q allgemein durch den Produktansatz:

$$q(\alpha) = g(\vartheta) \cdot q_{\text{iso}} = 2^{\frac{\vartheta - 20}{14}} \cdot a^2 \cdot \frac{\alpha - 1}{2 \cdot \ln(1 - \alpha)} \cdot Q_{\infty} \quad (2.25)$$

Abb. 2-8 zeigt die Funktionen $Q_{\text{iso}}(t)$ und q_{iso} für einen Zement 32,5 mit den mittleren Werten nach Tabelle 2.4. Es zeigt sich, daß beide Kurvenverläufe nicht den tatsächlichen Charakter der gemessenen Verläufe (vgl. Abb. 2-6) in der Anfangsphase der Hydratation wiedergeben. Kirchner schreibt in [108], daß sich die anfänglichen Ungenauigkeiten im Verlauf der Rechnung ausgleichen; dies deckt sich jedoch nicht mit den Erfahrungen des Autors. Auch stehen Ansätze zur Verfügung, die in der Lage sind, das tatsächliche Verhalten besser wiederzugeben.

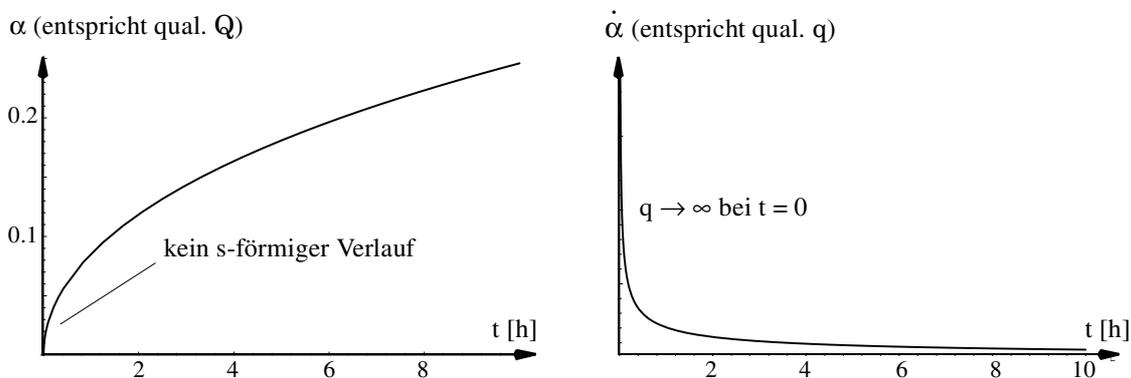


Abb. 2-8: Verlauf von $Q(t)$ und $q(t)$ nach dem Ansatz von Kirchner.

2.3.3.7 Ansatz nach Reinhardt, Blaauwendraad und Jongendijk

Ein im Aufbau von den bisher vorgestellten Funktionen abweichender Ansatz wurde von Reinhardt, Blaauwendraad und Jongendijk [168] vorgestellt, der auch in modifizierter Form Eingang in das kommerzielle FE-Paket DIANA gefunden hat. Der Grundgedanke besteht darin, den Ansatz nicht für den Hydratationsgrad, sondern für die Wärmefreisetzung q zu machen.

Reinhardt et al. schlagen einen Produktansatz vor, der eine temperaturabhängige Funktion $f_1(\vartheta)$ multiplikativ mit einer Funktion $f_2(r)$ verknüpft, welche die Abhängigkeit vom Hydratationsfortschritt enthält. Über einen Skalierungsfaktor F wird die Anpassung an die tatsächliche Größe der Wärmefreisetzung vorgenommen:

$$q(r) = F \cdot f_1(\vartheta) \cdot f_2(r) \quad (2.26)$$

Dabei ist r ein neu eingeführter Reaktionsgrad, der linear mit dem Hydratationsgrad α verknüpft ist.

$$r = \frac{\alpha - 0,1}{0,9} \quad \text{mit } r \in [0;1] \quad \text{und } \alpha \in [0,1;1] \quad (2.27)$$

Aus Gleichung (2.27) wird deutlich, daß $r = 0$ einem Hydratationsgrad von $\alpha = 0.1$ entspricht, der oft als ungefährer Zeitpunkt für den Beginn der Ausbildung von Festkörpereigenschaften angesehen wird. Soll r experimentell ermittelt werden, dann geschieht dies aus der adiabaten Versuchskurve für

$\bar{Q}(t)$, wobei $\bar{Q}(t)$ diejenige Wärmemenge ist, die ab Einsetzen der Festkörpereigenschaften ($\alpha \approx 0.1$) gemessen wird.

$$r = \frac{\bar{Q}(t)}{\bar{Q}(t=90d) \approx \bar{Q}_\infty} \quad (2.28)$$

Da der Ansatz nach Gleichung (2.26) nicht von einem wirksamen Betonalter ausgeht (vgl. Abschnitt 2.3.2), wird der Einfluß der Erhärtungstemperatur auf die Wärmeentwicklung durch einen Arrhenius-Ansatz für die Funktion $f_1(\vartheta)$ berücksichtigt:

$$f_1(\vartheta) = \exp \left(-\frac{c_A}{T} \right) = \exp \left(-\frac{6000}{\vartheta(t) + 273} \right) \quad (2.29)$$

mit c_A Arrhenius-Konstante, $c_A \approx 6000$
 T absolute Erhärtungstemperatur [K], $T = \vartheta + 273$
 ϑ Erhärtungstemperatur in [$^{\circ}\text{C}$]

Die Temperatur ist bei nicht-isothermen Bedingungen variabel und abhängig von der Zeit bzw. hier vom Erhärtungsgrad r . Bei isothermen Bedingungen ist $f_1(\vartheta)$ konstant, was bedeutet, daß $f_2(r)$ einen Ansatz für den Verlauf der isothermen Wärmefreisetzung darstellt, wie aus Gleichung (2.26) hervorgeht. Für $f_2(r)$ wird ein empirischer Ansatz gemacht, dessen Parameter durch Abgleich von Meßkurven bestimmt werden müssen. In [168] wird folgende Funktion verwendet:

$$f_2(r) = a \cdot r^2 \cdot e^{-b \cdot r^3} + c \cdot r \cdot e^{-d \cdot r}, \quad (2.30)$$

wobei a , b , c und d die Modellparameter darstellen. Dieser Ansatz wird jedoch in keiner dem Autor bekannten sonstigen Literatur verwendet. Auch in [168] sind keine Parameterwerte für einen Beispielbeton angegeben. Aus Abb. 2-9 geht hervor, daß der Ansatz für $f_2(r)$ nach Gleichung (2.30) grundsätzlich in der Lage ist, den Verlauf von q adäquat zu beschreiben.

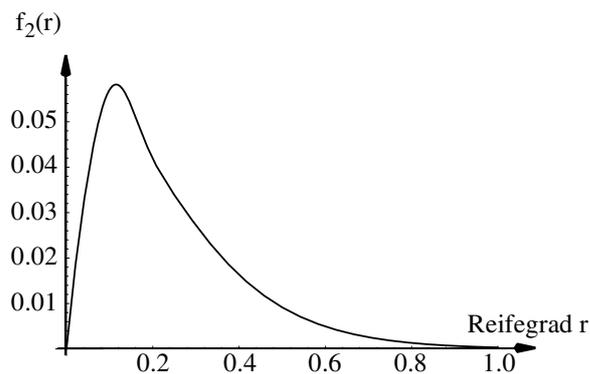


Abb. 2-9: Prinzipieller Verlauf der Funktion $f_2(r)$ nach Gleichung (2.30) mit fiktiven Modellparametern.

Nach Meinung des Verfassers ist die Verwendung des unüblichen Reaktionsgrades r nicht zweckmäßig. Ebenso könnte man den Produktansatz in Abhängigkeit des Hydratationsgrades α wie folgt definieren.

$$q(\alpha) = F \cdot f_1(\vartheta) \cdot f_2(\alpha) \quad (2.31)$$

In Anhang B wird ein Vorschlag für eine Funktion $f_2(\alpha)$ gemacht, die aus dem Ansatz nach Jonasson abgeleitet wird. Damit wird auch der folgende gravierende Nachteil bei der Verwendung von r eliminiert: Da die Berechnung bei $\alpha = 0.1$ beginnt, sind zu diesem Zeitpunkt bereits 10 % der gesamten Hydratationswärme freigesetzt, die nicht in die Berechnung eingehen. Die Temperaturerhöhungen werden deshalb unterschätzt. Da der Temperaturverlauf nicht richtig berechnet wird, stimmen auch die Nullspannungstemperaturen und Zwangspannungen allenfalls näherungsweise.

2.3.3.8 Ansatz nach Fischer, Smuda, Wolfersdorf und Herold

Wie Reinhardt et al. schlagen auch Fischer, Smuda, Wolfersdorf und Herold [73] einen Produktansatz für die Wärmefreisetzungsrates q vor, der auf Arbeiten von Schüssler [196] beruht:

$$q = \dot{Q} = q_{\max} \cdot f(Q) \cdot g(\vartheta) \quad (2.32)$$

Für den temperaturabhängigen Term $g(\vartheta)$ wird ein modifizierter Arrhenius-Ansatz verwendet:

$$g(\vartheta) = \exp \left[a \cdot \operatorname{sgn} \frac{\vartheta - \vartheta_M}{\vartheta + \vartheta_A} \cdot \operatorname{abs} \frac{\vartheta - \vartheta_M}{\vartheta + \vartheta_A} \right]^b \quad (2.33)$$

Für den hydrationswärmeabhängigen Term $f(Q)$ wird folgender Ansatz gemacht:

$$f(Q) = \frac{Q}{Q_W}{}^c \frac{Q_\infty - Q}{Q_\infty - Q_W}{}^d \quad (2.34)$$

Mit der Beziehung $Q = \alpha \cdot Q_\infty$ kann f zum Vergleich mit dem in Abschnitt 2.3.3.7 beschriebenen Ansatz auch als Funktion des Hydrationsgrades angegeben werden:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha_W}{}^c \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha_W}{}^d \quad (2.35)$$

Bei diesem Ansatz stehen insgesamt 8 Modellparameter zur Verfügung, um die Anpassung an die Versuchskurven vorzunehmen:

| | |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| q_{\max} | Maximalwert der Wärmefreisetzungsrates |
| ϑ_A | Temperaturparameter |
| Q_W | Freigesetzte Wärmemenge am Wendepunkt der Funktion $f(Q)$ |
| α_W | $= Q_W / Q_\infty$, Hydrationsgrad zum Zeitpunkt der max. Wärmefreisetzungsrates |
| ϑ_M | Temperatur am Wendepunkt der Reifefunktion |
| a, b, c, d | Modellparameter ohne anschauliche Bedeutung |

2.3.4 Vergleich und Wertung der Ansätze

2.3.4.1 Allgemeine Gesichtspunkte

Bei der Wertung der Ansätze spielt nicht nur die Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen eine Rolle. Im Hinblick auf den praktischen Einsatz sind auch folgende Kriterien zu prüfen:

- Einfache, klar definierte und allgemein anwendbare Bestimmung der Modellparameter. Jeder Ansatz ist nur so gut wie die Eingangsparameter.
- Kombination mit einer Reifefunktion zur Umrechnung des adiabaten oder isothermen Grenzfalles auf baupraktische Erhärtingsbedingungen.
- Formulierung in Abhängigkeit des Hydratationsgrades als Eingangswert in die Bestimmung der aktuellen Materialkennwerte (siehe Kapitel 3).
- Ausreichende Verbreitung und Akzeptanz.
- Einheitenreine Formulierung, damit die Modellparameter beim Wechsel des Einheitensystems nicht neu bestimmt werden müssen.

Beim Vergleich von Ansatzfunktionen und Versuchskurven muß auch berücksichtigt werden, ob eine Umrechnung des tatsächlichen in das wirksame Betonalter erfolgt. Ist dies der Fall, so kann nur eine Aussage über die Kombination aus Hydratationsansatz und Reifefunktion erfolgen. Die Reifefunktion verschiedener Hydratationsansätze ist nicht ohne weiteres austauschbar.

2.3.4.2 Umformung in die Produktform

Die vorgestellten Ansätze lassen sich in zwei Gruppen unterteilen: Ansätze mit Exponentialfunktionen und Produktansätze. Um eine echte Vergleichbarkeit zu erzielen und als Ausgangspunkt für spätere Überlegungen soll im folgenden gezeigt werden, daß die Exponentialansätze in die Produktform umgeformt werden können. Bei Verwendung der Definition des Hydratationsgrades entsprechend Gleichung (2.4) gilt:

$$Q = Q_{\infty} \cdot \alpha \quad q = \dot{Q} = Q_{\infty} \cdot \dot{\alpha} \quad (2.36)$$

Dabei ist die Zeitableitung des in Abhängigkeit des wirksamen Betonalters definierten Hydratationsgrades

$$\dot{\alpha} = \alpha_{,\tau_w} \cdot \tau_{w,t} \quad , \quad (2.37)$$

wobei $\alpha_{,\tau_w}$ in Abhängigkeit von α oder τ_w formuliert werden kann, indem α durch die Ansatzfunktion selbst substituiert wird. Die Ableitung des wirksamen Betonalters nach der Zeit $\tau_{w,t}$ ist nichts anderes als die Reifefunktion, die in Abschnitt 2.3.2 behandelt wurde. Man erhält somit eine Form entsprechend dem Ansatz nach Reinhardt et al. (Abschnitt 2.3.3.7):

$$\dot{\alpha} = \alpha_{,\tau_w} \cdot \tau_{w,t} = f(\alpha) \cdot g(\vartheta) \rightarrow f(\tau_w) \cdot g(\vartheta) = f\left(\int g(\vartheta) dt\right) \cdot g(\vartheta) \quad (2.38)$$

Mit $\alpha = Q / Q_{\infty}$ findet man eine Darstellung, die dem Ansatz von Fischer et al. bzw. Kirchner entspricht. Man sieht nun deutlich, daß alle Ansätze implizit in ähnlicher Form die Trennung in eine Reifefunktion $g(\vartheta)$, welche die Temperaturabhängigkeit und damit den Unterschied der isothermen

und adiabaten Erhärtung berücksichtigt, und in eine Ansatzfunktion $f(\alpha)$ für die Wärmeentwicklung bei konstanter Temperatur beinhalten.

2.3.4.3 Vergleich der Reifefunktionen

Wenn man zuerst die Reifefunktionen vergleicht (Abb. 2-10), so fällt auf, daß die Ansätze nach Freiesleben et al., nach Kirchner und der von Reinhardt et al. verwendete Ansatz nach Arrhenius in etwa die gleiche Charakteristik einer Exponentialfunktion aufweisen. Der Ansatz von Saul verläuft als einziger linear und scheint somit den neueren Forschungsergebnissen insbesondere im Bereich höherer Temperaturen nicht voll gerecht zu werden.

Die Reifefunktion nach Fischer et al. dürfte im allgemeinen für baupraktische Berechnungen aufgrund des augenscheinlich unbegründet s-förmigen Verlaufs und der Notwendigkeit, vier Modellparameter zu bestimmen, nicht zur Anwendung kommen. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß sowohl der einfach aufgebaute Ansatz nach Kirchner wie auch der Ansatz nach Freiesleben et al. zu bevorzugen sind, wobei letzterer bereits in mehreren Arbeiten experimentell bestätigt wurde [83, 126].

2.3.4.4 Vergleich der Ansatzfunktionen für den Hydratationsfortschritt

Da es seitens der Baustoffkunde nach Kenntnis des Autors noch keine umfassende Arbeit gibt, welche die Qualität der Hydratationsansätze experimentell untersucht, kann der folgende Vergleich nur qualitativ ausfallen, da die einzelnen Modellparameter nicht für einen identischen sondern nur für ähnliche Betone bekannt sind. Deshalb wird nur der prinzipielle Verlauf der Ansatzfunktion diskutiert, was allerdings keine wesentliche Einschränkung darstellt, da gerade dieser prinzipielle Verlauf die Leistungsfähigkeit des Ansatzes bestimmt. Die Anpassungsmöglichkeit an einen bestimmten Beton dürfte bei allen Ansätzen über die Modellparameter möglich sein.

Zum Vergleich der Ansatzkonzepte für den Hydratationsgrad bzw. die Wärmefreisetzung wird von der in Abschnitt 2.3.4.2 beschriebenen Umformung Gebrauch gemacht, d. h. es werden die Zeitableitungen der Ansatzfunktionen f verglichen. Dabei ergeben sich Funktionen in Abhängigkeit der Zeit, die unter Zuhilfenahme der Ansatzfunktion selbst in Abhängigkeit des Hydratationsgrades α angegeben werden können. Dies soll beispielhaft für den Hydratationsansatz nach Jonasson gezeigt werden:

$$\alpha = \exp \left[b \cdot \ln \left(1 + \frac{\tau_w}{\tau_k} \right)^a \right],$$

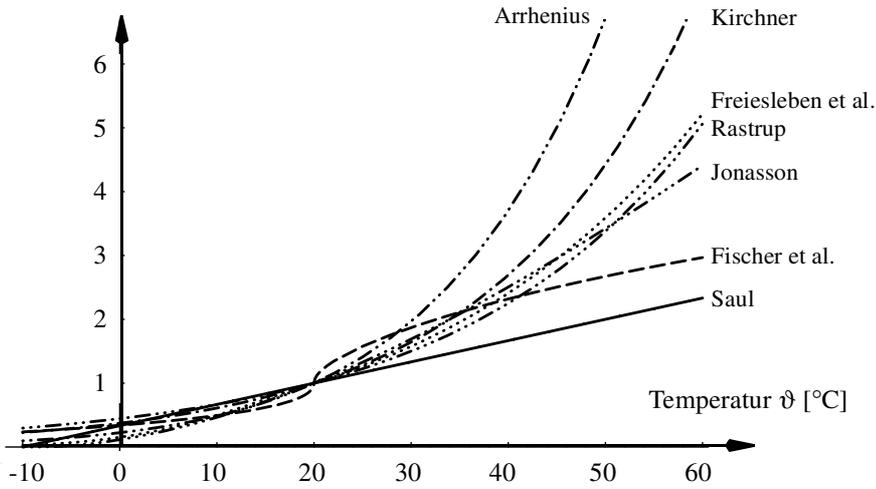
oder aufgelöst nach τ_w

$$\tau_w = \tau_k \exp \left[\frac{\ln(\alpha)}{b} \right]^{1/a} - 1. \quad (2.39)$$

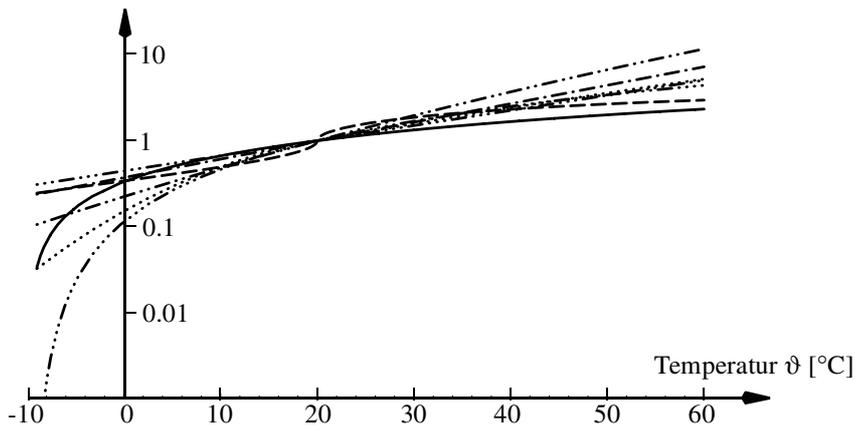
Die Funktion $f(\tau_w)$ ergibt sich nach Gleichung (2.38) zu

$$f(\tau_w) = \alpha_{,\tau_w} = a b \frac{\ln \left(1 + \frac{\tau_w}{\tau_k} \right)^{a-1}}{\tau_k + \tau_w} \underbrace{\exp \left(b \ln \left(1 + \frac{\tau_w}{\tau_k} \right)^a \right)}_{\alpha}. \quad (2.40)$$

Reifefunktionen $g(\vartheta)$



Reifefunktionen $g(\vartheta)$ in halblogarithm. Darstellung



Reifefunktionen $g(\vartheta)$ in analytischer Darstellung

| | | |
|---------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| --- Arrhenius: | $\exp \frac{6000}{\vartheta(t) + 273}$ (skaliert, so daß 1 für $\vartheta = 20^\circ\text{C}$) | Gl. (2.29) |
| --- Kirchner: | $2^{\frac{\vartheta - 20}{14}}$ | Gl. (2.24) |
| Freiesleben et al.: | $\exp \frac{A}{R} \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{273 + \vartheta} \right)$ | Gl. (2.7) |
| --- Fischer et al.: | $\exp a_1 \cdot \operatorname{sgn} \frac{\vartheta - \vartheta_M}{\vartheta + \vartheta_A} \cdot \operatorname{abs} \frac{\vartheta - \vartheta_M}{\vartheta + \vartheta_A}^{a_2}$ | Gl. (2.33) |
| — Saul: | $\frac{\vartheta + 10}{30}$ | Gl. (2.6) |
| --- Rastrup: | $\exp \frac{\ln(1,5)}{10} (\vartheta - 20)$ | [97,126] |
| --- Jonasson: | $\exp 5300 \frac{30}{\vartheta + 10}^{0,45} \frac{1}{293} - \frac{1}{273 + \vartheta}$ | [102,103] |

Abb. 2-10: Vergleichende Darstellung der Reifefunktionen verschiedener Autoren.

Diese Form ist anschaulich die implizite Ansatzfunktion für die Wärmefreisetzung $q(\tau_w)$. Da τ_w unter isothermen Verhältnissen bei konstant 20°C identisch mit der realen Zeit t ist, läßt sich in diesem Fall aus Gleichung (2.40) unmittelbar der Verlauf der Wärmefreisetzung ablesen. In Abb. 2-11 sind die so gewonnenen Funktionen $f(\tau_w)$ der Ansätze nach Byfors, Jonasson, Marx und Wesche über dem wirksamen Betonalter aufgetragen, wobei nochmals darauf hingewiesen sei, daß die Modellparameter nicht für ein und denselben Beton vorlagen. Man erkennt, daß sich die Ansätze nach Byfors, Jonasson und Wesche sehr ähnlich sind, während der Ansatz nach Marx das tatsächliche Verhalten offensichtlich nur ungenügend wiedergibt.

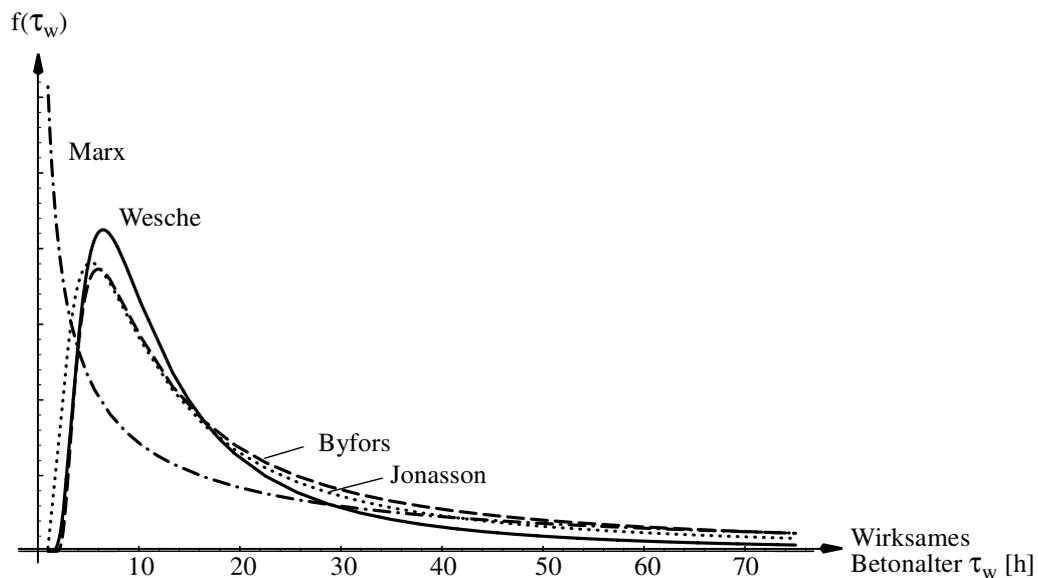


Abb. 2-11: Vergleich der isothermen Wärmefreisetzung nach Marx, Wesche, Byfors und Jonasson.

Substituiert man in Gleichung (2.40) den letzten Faktor durch α und ersetzt τ_w durch Gleichung (2.39), so erhält man $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{ab}{\tau_k} \frac{\ln\left(\exp\left(\left(\frac{\ln(\alpha)}{b}\right)^{\frac{1}{a}}\right)\right)^{a-1}}{\exp\left(\left(\frac{\ln(\alpha)}{b}\right)^{\frac{1}{a}}\right)} \alpha = \frac{ab}{\tau_k} \frac{\left(\frac{\ln(\alpha)}{b}\right)^{1-\frac{1}{a}}}{\exp\left(\left(\frac{\ln(\alpha)}{b}\right)^{\frac{1}{a}}\right)} \alpha = \frac{a}{\tau_k} \alpha \ln(\alpha) \left(\alpha^{\frac{1}{b}} \cdot \frac{\ln(\alpha)}{b}\right)^{-\frac{1}{a}} \quad (2.41)$$

Diese Form ist nun unmittelbar vergleichbar mit den Ansatzfunktionen nach Reinhardt et al., Fischer et al. und Kirchner, die auch jeweils einen Ansatz in Abhängigkeit von α oder Q gewählt haben. In Abb. 2-12 sind diese Ansätze einander gegenübergestellt. Die unterschiedlichen Verläufe der Ansätze nach Reinhardt, Fischer et al. und Jonasson stellen keine prinzipiellen Unterschiede dar, sondern resultieren aus den Modellparametern für ähnliche, aber eben nicht identische Betone. Dagegen fällt der Ansatz nach Kirchner aus der Reihe und ist offensichtlich mit einer unendlich großen Wärmefreisetzung zu Hydratationsbeginn ebenso wie der Ansatz nach Marx weniger geeignet, um die tatsächlichen Verhältnisse wiederzugeben.

Wie am Anfang dieses Abschnittes erläutert wurde, ist es notwendig, die Reifefunktion und den Ansatz für die Hydratationsentwicklung als Kombination zu betrachten und zu bewerten. Unter die-

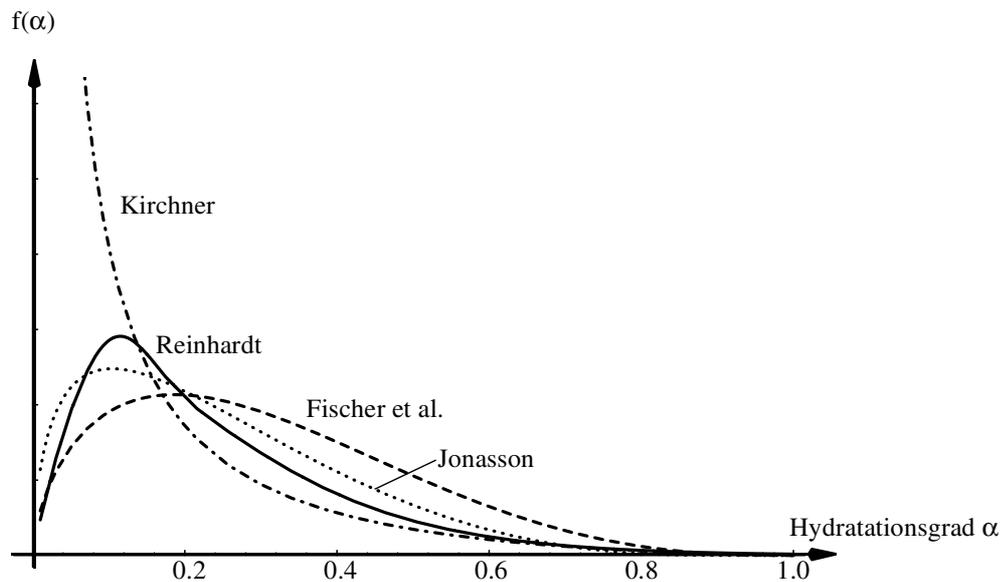


Abb. 2-12: Vergleich der Ansätze für die Wärmefreisetzung verschiedener Autoren.

sem Gesichtspunkt ist ein Ansatzkonzept, das die Reifefunktion nach Freiesleben et al. mit dem Hydratationsansatz nach Jonasson verbindet, am besten geeignet, um realistische Temperatur- und Verschiebungsberechnungen zu ermöglichen. Wird, z.B. im Rahmen einer statischen Voruntersuchung, mehr Wert auf einen mathematisch einfachen Aufbau mit wenigen Modellparametern gelegt, so erzielt man mit der Reifefunktion nach Saul, kombiniert mit dem Ansatz nach Wesche ausreichend genaue Ergebnisse (vgl. Anhang A.3).

2.4 Anwendung bei einer statischen Berechnung

2.4.1 Statische Berechnungen mit Berücksichtigung der Hydratation

Wie bereits in Kapitel 1 erläutert, ist für eine Reihe von Bauwerken und Bauteilen die Berücksichtigung der Beanspruchungen aus Abfließen der Hydratationswärme notwendig. Diese Berücksichtigung kann sich praktisch sehr unterschiedlich äußern. In einer Vielzahl von Fällen mag es ausreichen, von Erfahrungswerten, konstruktiven Regelungen oder von stark vereinfachten Annahmen auszugehen. Genügt dies nicht und kommen Versuche nicht in Frage, so muß die Hydratation bzw. ihre Auswirkung mit einem computerorientierten Rechenverfahren modelliert werden. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten (vgl. auch Abschnitt 5.1.2):

- Es wird ein Standard-FE-Programm unter Ansatz einer Ersatztemperaturlast eingesetzt, deren Größe aus Messungen an ausgeführten Bauwerken, Erfahrungswerten oder aus der Literatur stammen kann. Der Lastfall *Abfließen der Hydratationswärme* wird also als quasi-statische Abkühlung aufgefaßt. Da die Materialkennwerte zeitveränderlich sind, muß die Berechnung mit geschätzten mittleren Werten durchgeführt werden.
- Es wird eine Zeitverlaufsrechnung durchgeführt, die in Zeitschritten den tatsächlichen Temperaturverlauf und die veränderlichen Materialparameter berücksichtigt. Der Temperaturverlauf

kann aus Messungen an ausgeführten Bauwerken stammen oder aus einer Temperaturberechnung z.B. basierend auf der FEM, wozu allerdings der zeitliche Verlauf der Wärmefreisetzung bekannt sein muß.

- Es wird ein Programm verwendet, das die Berechnung von Temperaturen und Verschiebungen simultan mit einem implementierten Ansatz für die Hydratationsentwicklung vornimmt. Zur Zeit sind dazu nur sehr wenige, hauptsächlich im Forschungsbereich eingesetzte Programme in der Lage [213].

2.4.2 Zeitlicher Verlauf der Wärmefreisetzung

Oft ist der Verlauf der Wärmefreisetzung unter Bauwerksbedingungen in Abhängigkeit der Realzeit als Eingangswert in ein FE-Programm anzugeben¹. Je nach Lage innerhalb des Bauteiles entspricht dies einem Zustand zwischen den Grenzfällen der adiabaten Erwärmung im inneren massiger Bauteile und der isothermen Erhärtung, z.B. an den Außenflächen von Bauteilen. Wird die Wärmefreisetzung manuell in ein Programm eingegeben, so ist eine Differenzierung innerhalb von Bauteilen oft zu aufwendig, oder nur in groben Rastern machbar. Das bedeutet, man wird sich vereinfachend für eine einzige Kurve entscheiden, die entweder dem isothermen oder dem adiabaten Fall, oder einem Zwischenwert entspricht. Letzteres vor allem dann, wenn Messungen der Wärmefreisetzung unter vergleichbaren Bauwerksbedingungen vorliegen, die rechnerisch als Grundlage verwendet werden.

Liegen Meßergebnisse aus dem Labor vor, so müssen diese eventuell umgerechnet werden. Aus den Ausführungen in Abschnitt 2.3.2 wird deutlich, daß dazu eine Transformation der Zeitachse notwendig ist, die durch Substitution der realen Zeit t mit dem wirksamen Betonalter τ_w erreicht wird. Liegt z.B. aus einem adiabaten Versuch die Temperaturkurve $\vartheta_{ad}(t) = Q(t)/cp$ und die daraus abgeleitete Wärmefreisetzungskurve $q_{ad}(t)$ vor, so erfolgt die Umrechnung in die isotherme Wärmefreisetzungskurve bei $\vartheta_{iso} = 20^\circ\text{C}$ mit der Beziehung

$$q_{ad}(t) = q_{iso, 20}(\tau_w) , \quad (2.42)$$

wobei die Umrechnung in das wirksame Betonalter z.B. nach Gleichung (2.6) oder Gleichung (2.7) erfolgt. Ist die isotherme Referenztemperatur ϑ_{iso} nicht identisch 20°C , so erfolgt durch nochmalige Anwendung dieser Gleichung eine weitere Verzerrung der Zeitachse mit einem konstanten, von ϑ_{iso} abhängigen Faktor. Aus Abb. 2-13 wird deutlich, daß bei adiabaten Bedingungen je nach Ausgangstemperatur verschiedene Reifefunktionen recht unterschiedliche Ergebnisse liefern können. Die tatsächlichen Bauwerksbedingungen sind, außer bei äußerst massigen Bauwerken wie Staumauern, nur im Anfangsbereich ähnlich zur adiabaten Erhärtung, bei der die Maximaltemperatur beliebig lange erhalten bleibt. In Realität fällt die Temperatur nach dem Erreichen eines Maximums, das unterhalb des adiabaten Grenzwertes liegt, wieder auf das Niveau der Umgebungstemperatur ab, so daß der Reifeprozess unter annähernd isothermen Bedingungen beendet wird.

Stehen keine Meßkurven als Ausgangsbasis für die statische Berechnung zur Verfügung, und muß die Wärmefreisetzung in Abhängigkeit von der realen Zeit angegeben werden, so ist dies in analytischer Form nur für isotherme Bedingungen möglich, d.h. wenn die Abbildung der Zeitachse auf das wirksame Betonalter linear ist. Im nicht isothermen Fall beeinflußt die sich einstellende Bauteiltemperatur das wirksame Betonalter und damit den Verlauf $q(t)$. Analytisch ergibt sich auch im

1. Z.B. bei einer Berechnung mit den in Deutschland verbreiteten SOFiSTiK-Programmen (HYDRA/ASE).

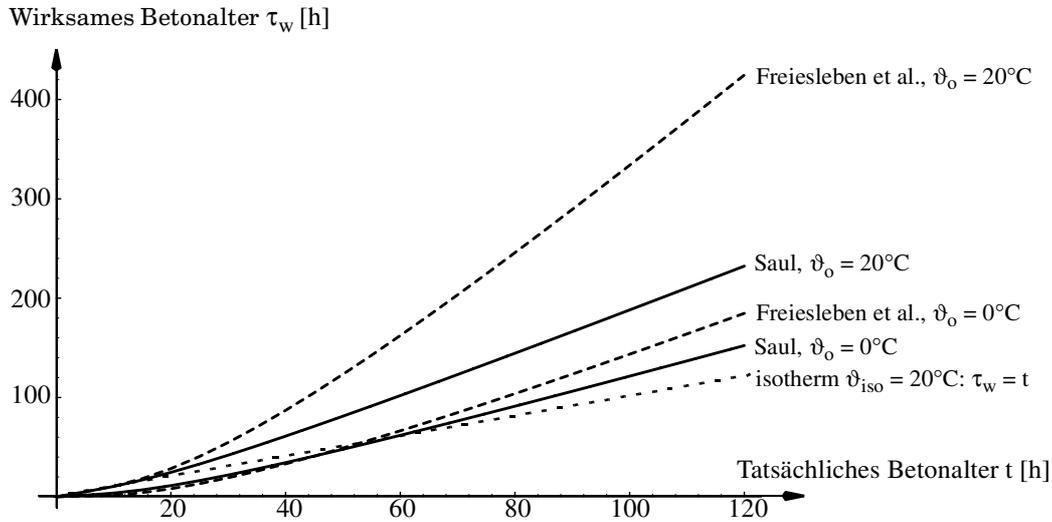


Abb. 2-13: Wirksames Alter τ_w nach Saul und Freiesleben et al. auf Grundlage der Ansatzfunktion nach Wesche bei adiabaten Bedingungen und verschiedenen Ausgangstemperaturen ϑ_0 .

adiabaten Sonderfall eine rekursive Beziehung die nur iterativ gelöst werden kann. Unterstellt man eine isotherme Erwärmung bei der Ausgangstemperatur des Bauteils, so unterschätzt man die maximale Wärmefreisetzung und damit die im Bauteil entstehenden Temperaturen, was für die Spannungsberechnung auf der unsicheren Seite liegt. In Anhang B wird deshalb eine baupraktische Näherungsmethode für die Ermittlung der Wärmefreisetzungskurve $q(t)$ ausgehend von einer isothermen Ersatztemperatur ϑ_{ers} vorgestellt.

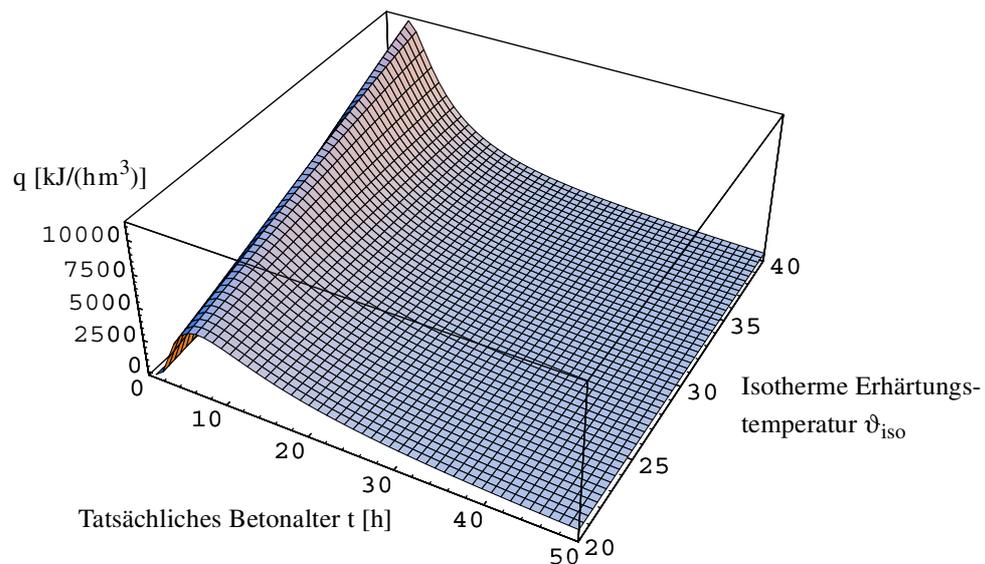


Abb. 2-14: Wärmefreisetzungsrates $q(t)$ bei verschiedenen isothermen Temperaturen ϑ_{ers} (nach Anhang B.1).

In Abb. 2-14 ist die zeitliche Wärmefreisetzung in Abhängigkeit der isothermen Temperatur ϑ_{iso} gezeigt. Man sieht, daß sich mit größerer Temperatur ϑ_{iso} ein stärker ausgeprägtes Maximum der Wärmefreisetzungsrates zu einem früheren Zeitpunkt ergibt. Für jeden Wert ϑ_{iso} ist das Integral der Wärmefreisetzungsrates gleich dem Wert Q_{∞} .

2.4.3 Ansatzfunktionen in Abhängigkeit des Hydratationsgrades

Die Entwicklung der Materialparameter liegt als Funktion des Hydratationsgrades vor. Deshalb ist es naheliegend, den Hydratationsgrad anstatt der Zeit als primäre Variable für den transienten Prozeß zugrunde zu legen. Dazu muß auch die Wärmefreisetzungsrates als Funktion des Hydratationsgrades $q(\alpha)$ formuliert und für entsprechende FE-Programme¹ als Eingabe bereitgestellt werden. Die Grundgedanken der Herleitung werden zunächst am Beispiel des Ansatzes nach Jonasson für den isothermen Fall gezeigt, wobei auf Grundlagen aus den Abschnitten 2.3.4.2 und 2.3.4.4 zurückgegriffen wird. Danach wird gezeigt, daß es in dieser Form auch möglich ist, eine Lösung für den Fall der adiabaten Erhärtung anzugeben. Die Herleitung geht von den Gleichungen (2.36) und (2.37) aus:

$$q(\alpha) = Q_{\infty} \cdot \dot{\alpha} = Q_{\infty} \cdot \alpha_{,\tau_w} \cdot \tau_{w,t} \quad (2.43)$$

Damit $q(\alpha)$ unabhängig von der Zeit ist, müssen die einzelnen Terme in Abhängigkeit von α aufgestellt werden. Für $\alpha_{,\tau_w}$ wurde dieses Vorgehen bereits in Abschnitt 2.3.4.4 gezeigt. Man erhält z.B. für den Ansatz nach Jonasson unabhängig von den Erhärtungsbedingungen nach Gleichung (2.40):

$$\alpha_{,\tau_w} = \frac{a}{\tau_k} \alpha \ln(\alpha) \left(\alpha^{\frac{1}{b}} \cdot \frac{\ln(\alpha)}{b} \right)^{-\frac{1}{a}}$$

Der Term $\tau_{w,t}$ ist die im isothermen Fall konstante Reifefunktion. Man erhält somit:

$$q_{\text{iso}}(\alpha) = Q_{\infty} \cdot \frac{a}{\tau_k} \alpha \ln(\alpha) \left(\alpha^{\frac{1}{b}} \cdot \frac{\ln(\alpha)}{b} \right)^{-\frac{1}{a}} \cdot \tau_{w,t} \quad (2.44)$$

Da es sich im isothermen Fall nur um eine Skalierung der Funktionen $f(\alpha)$ im Sinne eines Produktansatzes handelt (vgl. Abschnitt 2.3.4.4), kann der qualitative Verlauf für diesen und andere Ansätze aus Abb. 2-12 abgelesen werden.

Im adiabaten Fall ist die Reifefunktion $\tau_{w,t}$ nicht mehr konstant, sondern abhängig von der aktuellen Temperatur ϑ_{ad} , die in Abhängigkeit der bisher freigesetzten Wärme und damit auch als lineare Funktion von α mit Gleichung (3.6) geschrieben werden kann:

$$\vartheta_{\text{ad}}(\alpha) = \vartheta_o + \Delta\vartheta_{\text{ad}} = \vartheta_o + \frac{Q_{\infty}\alpha}{c\rho} \quad (2.45)$$

Setzt man diese Beziehung in die Reifefunktion nach Saul (Gl. (2.6)) ein, so ergibt sich ein relativ einfacher Term für $\tau_{w,t}$:

$$\tau_{w,t} = \frac{1}{30} \left(10 + \vartheta_o + \frac{Q_{\infty}\alpha}{c\rho} \right) \quad (2.46)$$

1. Z.B. bei DIANA [241], vgl. Anhang B.4.

Die gesuchte Form der Wärmefreisetzungsrate $q(\alpha)$ lautet damit:

$$q_{\text{ad,Saul}}(\alpha) = \frac{Q_{\infty} \cdot a \cdot \alpha \cdot \ln(\alpha)}{30 \tau_k \left(\alpha^{\frac{1}{b}} \cdot \frac{\ln(\alpha)}{b} \right)^{\frac{1}{a}}} \left(10 + \vartheta_0 + \frac{Q_{\infty} \alpha}{c \rho} \right) \quad (2.47)$$

Will man die Reifefunktion nach Freiesleben et al. verwenden, so ist zu beachten, daß in dieser die Aktivierungsenergie A temperaturabhängig formuliert ist (siehe Gleichung (2.7) auf Seite 13). Man erhält dann:

$$q_{\text{ad,Fr.}}(\alpha) = \frac{Q_{\infty} \cdot a \cdot \alpha \cdot \ln(\alpha)}{\tau_k \left(\alpha^{\frac{1}{b}} \cdot \frac{\ln(\alpha)}{b} \right)^{\frac{1}{a}}} \cdot \exp \left(\frac{A_0 + A_1 \left\langle 20 - \vartheta_0 + \frac{Q_{\infty} \alpha}{c \rho} \right\rangle}{R} \left(\frac{1}{293} + \frac{1}{273 + \vartheta_0 + \frac{Q_{\infty} \alpha}{c \rho}} \right) \right) \quad (2.48)$$

Darin bedeutet das Föppel-Symbol $\langle x \rangle$:

$$\langle x \rangle = 0 \quad \text{für } x \leq 0$$

$$\langle x \rangle = x \quad \text{für } x > 0$$

In Abb. 2-4b auf Seite 13 wurde bereits der Unterschied der adiabaten Wärmefreisetzungsrate nach den Gleichungen 2.47 und 2.48 bei einer Ausgangstemperatur von 20°C dargestellt. Durch die stärkere Gewichtung höherer Temperaturen bei der Reifefunktion nach Freiesleben et al. beschleunigt sich die adiabate Erwärmung selbst, so daß etwas höhere maximale Wärmefreisetzungsrate errechnet werden. Die integrale Wärmefreisetzung über die gesamte Hydratationszeit ist als Materialparameter durch Q_{∞} festgelegt und für alle Ansätze gleich.

Wird ein anderer als der Ansatz nach Jonasson für den Hydratationsfortschritt bevorzugt, ist eine analoge Ableitung ausgehend von der in Abschnitt 2.3.4.2 gezeigten Umformung in die Form eines Produktansatzes möglich:

$$q(\alpha) = Q_{\infty} \cdot f(\alpha) \cdot g(\vartheta) \quad \text{mit } f(\alpha) = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_w} \quad \text{und } g(\vartheta) = \text{Reifefunktion} \quad (2.49)$$

2.4.4 Hilfsmittel für den praktischen Einsatz

Insbesondere für statische Voruntersuchungen ist es oft nicht möglich, die Parameter der verschiedenen Ansatzfunktionen experimentell zu bestimmen. Vergleicht man die normierten Wärmefreisetzungscurven bzw. die Verläufe $f(\alpha)$ verschiedener Betone, so stellt man fest, daß in dieser Darstellung der Einfluß der Betonzusammensetzung nur eine gewisse Bandbreite erzeugt. Ausgehend von dieser Überlegung sind in Anhang B folgende Größen als Hilfsmittel für die Anwendung aufbereitet:

- Isotherme Wärmefreisetzungsrate q_{iso} bzw. die Ansatzfunktion $f(\alpha) = q_{\text{iso}} / (Q_{\infty} \cdot \hat{a})$
- Adiabate Wärmefreisetzungsrate $q_{\text{ad}} = Q_{\infty} \cdot f(\alpha) \cdot g(\vartheta_{\text{ad}})$
- Ansatzfunktionen $f(r)$ für den Ansatz nach Reinhardt et al. (Abschnitt 2.3.3.7) auf Basis des Ansatzes nach Jonasson.

Diese Hilfsmittel werden für die Betone nach Anhang A.1 aufgestellt und können in ihrer normierten Form auch auf vergleichbare Betone übertragen werden. Durch die Form des Produktansatzes von Gleichung (2.49) ist dann der einzige notwendige Eingangsparameter die gesamte Hydratations-

wärmemenge Q_{∞} . Auch diese kann ohne experimentelle Untersuchungen aus Erfahrungswerten oder gemäß den Ausführungen in Abschnitt 2.2 aus der Betonrezeptur abgeschätzt werden. Damit steht für Voruntersuchungen bei denen noch keine experimentellen Daten über das Hydratationsverhalten des verwendeten Betons vorliegen, ein in den meisten Fällen ausreichend genauer Ansatz zur Verfügung. Voraussetzung für eine solche Verallgemeinerung ist die Verwendung des Hydratationsgrades α als Bezugsgröße, die Wahl einer Ansatzfunktion für den Verlauf des Hydratationsgrades in Abhängigkeit des wirksamen Betonalters sowie die Wahl einer Reifefunktion.

2.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden zunächst die Grundlagen der Betonhydratation dargestellt, soweit sie für die Anwendung bei einer statischen Berechnung erforderlich sind. Liegen keine Messungen über den Temperaturverlauf im Bauwerk selbst vor, kann dieser rechnerisch mit der FEM ermittelt werden (vgl. Abschnitt 5.2). Voraussetzung dafür sind analytische Ansätze für die Entwicklung des wirksamen Betonalters (Reifefunktion) und der Wärmefreisetzung. Als normierte Bezugsgröße zur Beschreibung des Hydratationsfortschrittes wird der Hydratationsgrad α eingeführt. Der Schwerpunkt der Untersuchungen in diesem Kapitel liegt im Vergleich von Ansatzfunktionen, welche aus der Literatur entnommen wurden. Für diesen Vergleich ist es notwendig, die verschiedenen Konzepte in eine einheitliche mathematische Form zu bringen. Durch die Umformung in einen Produktansatz für alle untersuchten Ansätze kann sowohl die zugrundeliegende Reifefunktion wie auch der Ansatz für den Hydratationsfortschritt verglichen werden, und die Eignung zur Beschreibung von Hydratationsvorgängen beurteilt werden. Am besten geeignet und ausreichend experimentell verifiziert ist eine Kombination der Reifefunktion nach Freiesleben et al. mit dem Hydratationsansatz nach Jonasson. Zuletzt wird die Anwendung der Ansätze innerhalb einer statischen Berechnung diskutiert. Für die favorisierten Ansätze werden Hilfsmittel für die praktische Anwendung in Anhang B bereitgestellt.

Kapitel 3

Thermomechanische Werkstoffeigenschaften hydratisierenden Betons

3.1 Einleitung

Die Güte der rechnerischen Erfassung hydrationsbedingter Beanspruchungen wird maßgeblich von der Qualität des Werkstoffmodells beeinflusst, wobei der Schwerpunkt auf der korrekten Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Werkstoffeigenschaften liegt. Die Hydrationsabhängigkeit einiger Werkstoffparameter ist zur Zeit noch Forschungsgegenstand der Baustoffwissenschaft.

Im allgemeinen sind die mechanischen und thermischen Eigenschaften des Betons abhängig vom Wassergehalt und Feuchtezustand. Andererseits sind die hygroskopischen Eigenschaften wiederum abhängig vom Temperaturzustand, so daß sich eine Kopplung der Differentialgleichungen für Feuchtetransport und Wärmeleitung ergibt. Da in der vorliegenden Arbeit die Feuchteberechnung nicht behandelt wird, werden auch die thermischen und mechanischen Materialparameter feuchteunabhängig definiert. Dem globalen, natürlich hygroskopisch geprägten Verlauf der Parameterentwicklung während der Hydratation wird durch die empirisch ermittelten Ansätze Rechnung getragen. Vernachlässigt werden also nur lokale oder bauteilbedingte hygroskopische Einflüsse, wie etwa der Einfluß der witterungsbedingten Austrocknung am Bauteilrand.

Die Temperaturabhängigkeit der mechanischen und thermischen Eigenschaften kann im Temperaturbereich, der während des exothermen Hydrationsprozesses auftritt, in erster Näherung vernachlässigt werden. Bei Untersuchungen von Bauteilen, die z. B. durch einen Brand über 100°C aufgeheizt werden, ist diese Annahme nicht mehr zulässig [28].

3.2 Thermische Werkstoffeigenschaften

3.2.1 Wärmeleitfähigkeit

Für praktische Berechnungen kann die Wärmeleitfähigkeit λ als konstant angenommen werden [87, 135]. Der Grund ist vor allem darin zu sehen, daß die Anfangsphase der Hydratation unter annähernd adiabaten Bedingungen abläuft, unter denen die Wärmeleitung von untergeordneter Bedeutung ist. Wenn der Anteil der Wärmeleitung aufgrund des sich mit der Zeit einstellenden Tempera-

turgradienten an Bedeutung gewinnt, ist die Veränderlichkeit der maßgeblich vom Feuchtegehalt bestimmten Wärmeleitfähigkeit klein. Hamfler [87] gibt für erhärteten Beton mit geschlossenem Gefüge unter normalen thermischen und hygroskopischen Bedingungen eine Bandbreite für den Rechenwert der Wärmeleitfähigkeit λ_R an:

$$1,5 \leq \lambda_R \leq 2,1 \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right]$$

Soll die Hydratationsabhängigkeit nicht vernachlässigt werden, wird als ausreichende Näherung eine lineare Verknüpfung von λ mit dem Hydratationsgrad vorgeschlagen (Abb. 3-1):

$$\lambda(\alpha) = \lambda_0 - (\lambda_0 - \lambda_R) \cdot \alpha \quad (3.1)$$

Zur Bestimmung des Ausgangswertes λ_0 wird ein Ansatz von Kirchner [108] herangezogen, der von der volumenbezogenen Überschußfeuchte ϕ abhängig ist:

$$\lambda(\phi) = \lambda_R \frac{1 + 12\phi}{1,6} \quad (3.2)$$

Geht man davon aus, daß zu Hydratationsbeginn ca. 25 % des Zementgewichtes vom Wasser gebunden sind, so kann die Überschußfeuchte zu Hydratationsbeginn ϕ_0 ersetzt werden durch

$$\phi_0 = \frac{W - 0,25Z}{\rho_W}, \quad (3.3)$$

wobei W der Wassergehalt, Z der Zementgehalt und ρ_W die Dichte von Wasser ist. Somit ergibt sich die Wärmeleitfähigkeit zu Hydratationsbeginn:

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_R}{1,6} \cdot \left(1 + \frac{12W - 3Z}{1000} \right) \quad (3.4)$$

Wertet man diese Beziehung für die in Anhang A.3 angegebene W- und Z-Werte aus, so liegt λ_0 um 30 bis 55 % über λ_R . Zur Vereinfachung kann in Gleichung (3.1) $\lambda_0 \cong 1,5\lambda_R$ gesetzt werden.

3.2.2 Spezifische Wärmekapazität

Während die Wärmeleitfähigkeit hauptsächlich den Abbau des Temperaturgradienten und damit die Abkühlung des Betons bestimmt, entscheidet die spezifische Wärmekapazität c maßgeblich, zu welcher adiabaten Temperaturerhöhung die Hydratationswärme führt:

$$\Delta\vartheta_{\infty}^{\text{ad}} = \int_0^{\infty} \frac{q(t)}{c(t) \cdot \rho(t)} dt = \int_0^1 \frac{q(\alpha)}{c(\alpha) \cdot \rho(\alpha)} d\alpha \quad (3.5)$$

Geht man davon aus, daß neben der Dichte ρ auch die Wärmekapazität c konstant ist, dann vereinfacht sich diese Beziehung:

$$\Delta\vartheta^{\text{ad}}(t) = \frac{Q(t)}{c \cdot \rho} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\vartheta_{\infty}^{\text{ad}} = \frac{Q_{\infty}}{c \cdot \rho} \quad (3.6)$$

Aus dieser Gleichung wird klar, daß für die korrekte Temperaturberechnung der Quotient aus der gesamten Hydratationswärmemenge Q_{∞} und der Wärmekapazität $C = c \cdot \rho$ entscheidend ist.

Die Voraussetzung der Zeitinvarianz der Wärmekapazität ist eine Näherung. Mangold [135] gibt eine Formulierung in Abhängigkeit des Hydratationsgrades nach van Breugel an, die von den Komponenten des Frischbetons ausgeht. Demnach kann zur Berücksichtigung der Hydratationsabhängigkeit vereinfachend mit einer aus diesen Überlegungen abgeleiteten linearen Beziehung gerechnet werden (Abb. 3-1):

$$c(\alpha) = c_o - (c_o - c_R)\alpha \quad (3.7)$$

Aus der Literatur sind folgende Anhaltswerte zu entnehmen [126, 135, 168]:

Festbeton mit durchschnittlichem Feuchtegehalt: $c_R \cong 0,9 \dots 1,0 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$

Frischbeton und wassergesättigter Beton: $c_R \cong 1,0 \dots 1,15 \text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$

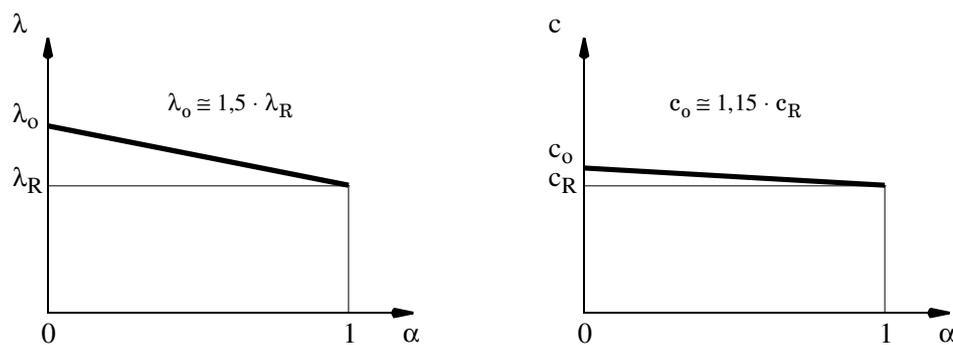


Abb. 3-1: Ansätze für die Hydratationsabhängigkeit der Wärmeleitzahl λ und der spezif. Wärmekapazität c .

3.3 Hydratationsabhängigkeit der elastischen Werkstoffeigenschaften

3.3.1 Spannungs–Dehnungs–Beziehung

Laube [126] hat in seiner Arbeit eine ausführliche Übersicht fremder und eigener Versuche zum Verformungsverhalten von jungem Beton zusammengestellt. Daraus geht hervor, daß ab einem Betonalter von etwa einem halben Tag im Druckbereich bis etwa 40 % der aktuellen Druckfestigkeit und im Zugbereich bis nahe an die aktuelle Zugfestigkeit mit sehr guter Näherung ein linearer Spannungs-Dehnungszusammenhang angesetzt werden kann (Abb. 3-2). Deshalb wurde bei den durchgeführten Berechnungen durchwegs mit linearen Beziehungen gearbeitet.

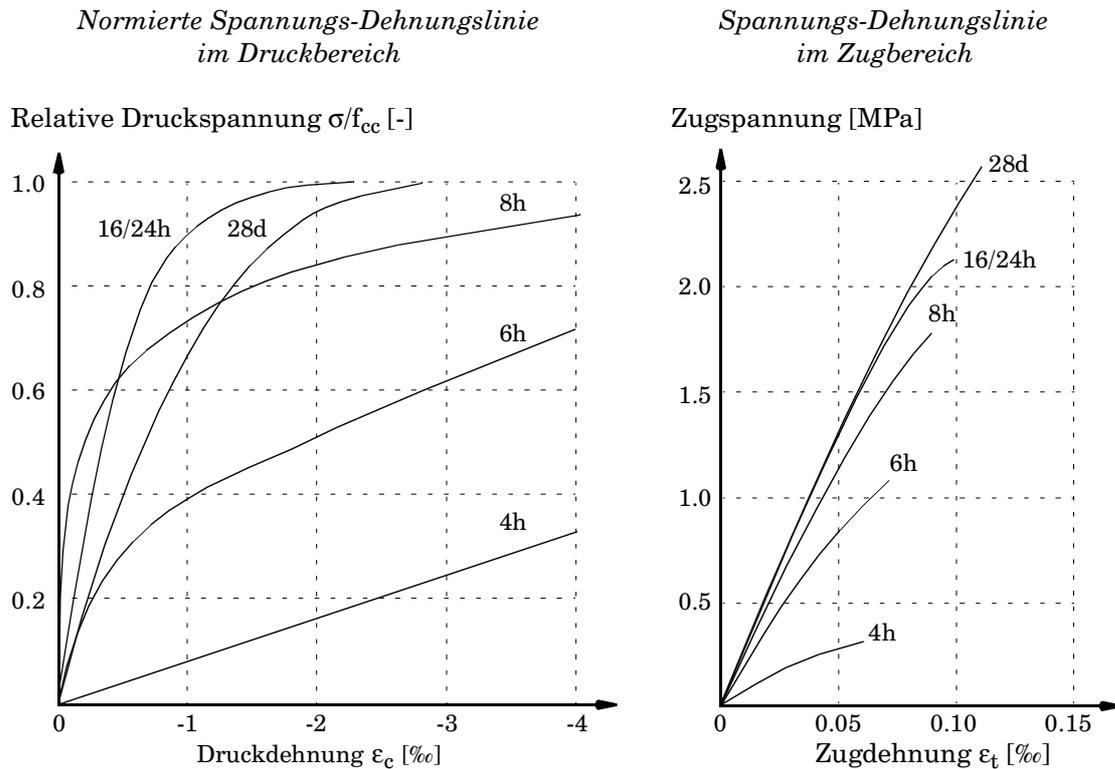


Abb. 3-2: Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang für jungen Beton unter Druck- und Zugbelastung [126].

3.3.2 Elastizitätsmodul und Querdehnzahl

In der Regel wird das elastische Materialverhalten durch den Elastizitätsmodul E und die Querdehnzahl ν beschrieben. Ein entscheidender Faktor bei der Berechnung erhärtender Betonbauteile ist die richtige Beschreibung der Entwicklung des E -Moduls während der Hydratation. Bei Druckbelastung wird der E -Modul in der Regel (z. B. [52]) als Sekantenmodul der σ - ϵ -Linie bei 40 % der Druckfestigkeit ermittelt. Der Ursprungsmodul, der auch dem Zugelastizitätsmodul entspricht, ist nach 28 Tagen etwa 10 bis 15 % größer als der auch in den Normen angegebene Sekantenmodul [30, 155]. Nach DIN 1045-1 [52] ist der Ursprungsmodul, auf den auch die Kriechfunktion bezogen werden soll, dagegen nur um 5 % höher anzunehmen als der Sekantenmodul.

Bei den in dieser Arbeit behandelten Problemstellungen ist es zweckmäßig, den erhöhten Zugelastizitätsmodul E_{ct} sowohl für den Zug- als auch für den Druckbereich anzusetzen. Für die Formulierung der Veränderlichkeit während der Hydratation hat sich in der Literatur durchgesetzt, den E -Modul in Abhängigkeit der Zug- oder der Druckfestigkeit als Bezugsgröße zu beschreiben. Für eine detaillierte Übersicht wird auf [63] verwiesen. An dieser Stelle sollen einige für die praktische Anwendung vorteilhafte Formulierungen vorgestellt werden. Für Voruntersuchungen eignet sich ein Vorschlag von Onken/Rostásy [155] in Abhängigkeit der aktuellen Würfeldruckfestigkeit $f_{c,cube}$:

$$E_c(f_{c,cube}) = 1,15 \cdot E_{c,28} \cdot \frac{f_{c,cube}^c}{f_{c,cube,28}} \quad (3.8)$$

Die zeitliche Entwicklung der Druckfestigkeit f_c , die in Abhängigkeit des Betonalters oder vorteilhaft in Abhängigkeit des Hydratationsgrades formuliert werden kann, wird in Abschnitt 3.4.1 behandelt. Während Onken/Rostásy für den Exponenten $c = 1/3$ vorschlagen, wird hier empfohlen, mit $c = 4/9$ zu rechnen, um einen konsistenten Übergang zu den Gleichungen (3.12), (3.19) und (3.25) zu gewährleisten, die für jungen Beton experimentell verifiziert sind.

Laube [126] schlägt den folgenden Ansatz in Abhängigkeit der Zugfestigkeit vor:

$$E_c(f_{ct}, \alpha) = \frac{(1 + f_{ct, \infty}^b) \cdot \hat{\beta}_{ct}^a}{1 + (f_{ct, \infty} \cdot \hat{\beta}_{ct})^b} E_{c, \infty} \quad (3.9)$$

Die Exponenten a und b sind Modellparameter, die aus Versuchen zu bestimmen sind, wobei der Grenzübergang für $\alpha = 1$ als Nebenbedingung zu beachten ist. Es ist zweckmäßig, $\hat{\beta}$ als Abkürzung für bezogene Festigkeiten einzuführen:

$$\text{Bezogene Zugfestigkeit} \quad \hat{\beta}_{ct} = \frac{f_{ct}(\alpha)}{f_{ct, \infty}} \quad (3.10)$$

$$\text{Bezogene Druckfestigkeit} \quad \hat{\beta}_{cc} = \frac{f_{cc}(\alpha)}{f_{cc, \infty}} \quad (3.11)$$

Onken und Rostásy [155] geben eine vereinfachte, jedoch genügend genaue Beziehung an, bei der neben $E_{c, \infty}$ nur noch ein Materialparameter, nämlich der Hydratationsgrad α_o , ab welchem Festkörpereigenschaften meßbar sind, eingeht:

$$E_c(\alpha, \alpha_o) = E_{c, \infty} \cdot \hat{\beta}_{ct}^{2/3} = E_{c, \infty} \frac{\alpha - \alpha_o}{1 - \alpha_o}^{2/3} \quad \text{für } \alpha_o \leq \alpha \leq 1 \quad (3.12)$$

Für α_o werden je nach Betonzusammensetzung Werte von 0.15 bis 0.40 angegeben, bei hochfesten Betonen können auch Werte kleiner 0.1 auftreten [83]. Die Gleichungen (3.9) und (3.12) sind in Abb. 3-6 auf Seite 46 graphisch gegenübergestellt.

Hofstetter und Mang [93] geben einige zeitabhängige Ansätze für die Entwicklung des Elastizitätsmoduls an, die sich jedoch nur zur groben Abschätzung eignen, da die Modellparameter lediglich für einen ‚Standardbeton‘ angegeben sind:

$$\text{ACI: } E_c(t) = E_{c, 28} \cdot \sqrt{\frac{t}{4 + 0,85t}} \quad t \text{ in [d]} \quad (3.13)$$

$$\text{CEB/FIP: } E_c(t) = E_{c, 28} \cdot \frac{t}{17,6 + 0,37t}^{1/7,35} \quad t \text{ in [d]} \quad (3.14)$$

Führt man bei diesen Ansätzen den Grenzübergang für $t \rightarrow \infty$ durch, so erhält man eine Abschätzung für den theoretischen Endwert des Elastizitätsmoduls:

$$E_{c, \infty} = \bar{E}_c = (1,085 \text{ bis } 1,14) E_{c, 28} \quad (3.15)$$

Dies paßt auch zu den Faktoren 1.13 nach Marx [136] bzw. 1.16 nach Bangash [4].

Ein weiterer Ansatz für die E-Modul-Entwicklung wurde von Bogert et al. [21] vorgeschlagen und ist z. B. im FEM-Paket DIANA implementiert:

$$E(t) = E_0 \int_0^t (\gamma_E(\tau))^7 \dot{r}(\tau) \frac{1 - \exp\left(-\frac{\beta_E(t-\tau)}{(g_E(\tau))^6}\right)}{d\tau} \quad \text{mit} \quad g_E(\tau) = \frac{273 + \vartheta(\tau)}{273}. \quad (3.16)$$

Der Modellparameter β_E ist ein Verzögerungsfaktor im Bereich zwischen 0.07 und 0.08, der durch Anpassung an Versuchskurven gefunden werden muß, r der Reaktionsgrad nach Abschnitt 2.3.3.7 und $\vartheta(\tau)$ der Verlauf der Erhärtungstemperatur. Da die Reifefunktion $g_E(\tau)$, welche den Einfluß der Erhärtungstemperatur berücksichtigen soll, mit sehr hohen Exponenten in die Gleichung eingeht, ist die Beziehung nur für annähernd isotherme Erhärtungsbedingungen mit Temperaturen zwischen 0°C und 30°C brauchbar. Bei höheren Temperaturen, wie sie bei dickeren Betonbauteilen auftreten, liefert Gleichung (3.16) Endwerte bis zum zweifachen von E_0 . Von einer Anwendung dieses Ansatzes wird deshalb abgeraten.

Im Gegensatz zum Elastizitätsmodul erweist sich die Erfassung der Querdehnzahl ν als weit weniger problematisch. Sie kann in guter Näherung als konstant mit $\nu = 0.2$ angenommen werden [248]. Soll die Entwicklung genauer erfaßt werden, so schlagen Bournazel/Moranville-Regourde [29], Hamfler [87], Paulini/Gratl [159] und de Schutter/Taerwe [198] jeweils unterschiedliche Abhängigkeiten vom Hydratationsgrad vor.

3.3.3 Temperaturdehnzahl

Für die mechanische Beanspruchung aus frühem Temperaturzwang ist die Temperaturdehnzahl α_T ein sensibler Parameter. Die Werte für den erhärteten Beton unterliegen abhängig von Zuschlagsart, Zementgehalt und Feuchtigkeitszustand erheblichen Schwankungen (Tabelle 3.1).

| Betonzuschlag | Feuchtigkeitszustand | Temperaturdehnzahl α_T in $[10^{-6}/K]$ von Beton mit einem Zementgehalt $[kg/m^3]$ von | | | |
|---------------------------------------------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|------|------|------|
| | | 200 | 300 | 400 | 500 |
| Quarzgestein | wassergesättigt | 11.6 | 11.6 | 11.6 | 11.6 |
| | lufttrocken | 12.7 | 13.0 | 13.4 | 13.8 |
| Quarzsand und Quarzkies | wassergesättigt | 11.1 | 11.1 | 11.2 | 11.2 |
| | lufttrocken | 12.2 | 12.6 | 13.0 | 13.4 |
| Granit, Gneis, Liparit | wassergesättigt | 7.9 | 8.1 | 8.3 | 8.5 |
| | lufttrocken | 9.1 | 9.7 | 10.2 | 10.9 |
| Syenit, Trachyt, Diorit, Andesi, Gabbro, Diabas, Basalt | wassergesättigt | 7.2 | 7.4 | 7.6 | 7.8 |
| | lufttrocken | 8.5 | 9.1 | 9.6 | 10.4 |
| dichter Kalkstein | wassergesättigt | 5.4 | 5.7 | 6.0 | 6.3 |
| | lufttrocken | 6.6 | 7.2 | 7.9 | 8.7 |

Tabelle 3.1: Richtwerte für die Temperaturdehnzahl α_T von Beton (entnommen aus [90]).

Über die Entwicklung der Temperaturdehnzahl während der Hydratation ist relativ wenig bekannt. In fast allen Arbeiten zum frühen Temperaturzwang wird mit konstanter Temperaturdehnzahl α_T gerechnet, was in vielen Fällen eine ausreichend gute Näherung darstellt, welche allerdings die Temperaturdehnungen während der Erwärmungsphase unterschätzt. Sicher erscheint, daß die Wärmedehnung des Frischbetons sehr hoch ist, da die Wärmedehnzahl des noch ungebundenen Wassers ($\alpha_T = 80 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$) dominiert, und in den ersten Stunden der Hydratation rasch abnimmt [135]. Man kann jedoch vereinfachend davon ausgehen, daß dies im wesentlichen vor Eintritt der Festkörpereigenschaften geschieht. Versuchsauswertungen in [126] zeigen, daß α_T nach dem Abfall in den ersten 16 Stunden wieder ansteigt. Danach widersprechen sich die Angaben verschiedener Autoren [31, 83, 87, 126, 193]. Allen gemein ist jedoch, daß sich die Schwankungen von α_T ab einem Betonalter von 24 bis 48 Stunden im Bereich von 10 bis 20 % bewegen, und sich andere Phänomene gleicher Größenordnung überlagern. Angesichts der Unsicherheiten wird deshalb vorgeschlagen, solange für den verwendeten Bauwerksbeton keine gesicherten Meßergebnisse vorliegen, mit einem konstanten Wert α_T zu rechnen [248].

3.3.4 Lastunabhängige Dehnungen: Schwinden und Quellen

Die dem Beton eigene, zeitlich veränderliche, last- und temperaturunabhängige Volumenverkleinerung (Schwinden) bzw. Volumenvergrößerung (Quellen) ist im Wesentlichen auf Änderungen des mikrostrukturellen Feuchtezustandes zurückzuführen. Je nach Ursache unterscheidet man [194]:

- Kapillares Schwinden, das auch als Anfangsverkürzung bezeichnet wird [126]. Da es vor dem Auftreten von Festkörpereigenschaften stattfindet, führt es nur zu plastischen Verformungen und nicht zu meßbaren mechanischen Beanspruchungen.
- Das chemische Quellen (Rückverlängerung [126]) und das chemische Schwinden sind zwei entgegengerichtete Phänomene, die sehr stark vom verwendeten Zement abhängen. Breitenbücher [31] hat durch Versuche mit Zementen der gleichen Klassifizierung unterschiedlicher Herkunft nachgewiesen, daß praktisch nicht vorhersagbar ist, welcher Anteil dominiert. Im Mittel heben sich bei Normalbeton das chemische Schwinden und Quellen gegenseitig auf¹. Für Grenzbeurteilungen kann man nach Versuchsergebnissen von Plannerer [161] davon ausgehen, daß sich aus chemischem Schwinden bzw. Quellen Spannungen von

$$\Delta\sigma = (-0,5 \dots +1,0)\psi \text{ [MPa]}$$

überlagern, wobei ψ der Grad der Verformungsbehinderung ist ($\psi \in [0;1]$).²

- Das Austrocknungsschwinden erreicht erst nach Abschluß des Hydratationsvorganges eine relevante Größenordnung, erstreckt sich über Monate und Jahre und hängt sehr stark von den Umgebungsbedingungen (Luftfeuchte) und der Bauteilgeometrie ab. Eine genaue Untersuchung der Beanspruchungen infolge Schwinden ist strenggenommen nur in Verbindung mit einer Berechnung des hygrischen Zustands möglich. Da sich Schwinddehnungen erst über Monate und Jahre entwickeln, ist jedoch eine derartige Genauigkeit bei den hier betrachteten Bauteilen unter frühem Temperaturzwang nicht notwendig.

1. Bei Bauteilen aus hochfestem Beton, die hier nicht näher betrachtet werden, liefert das chemische Schwinden einen wesentlichen Beitrag zu den rißerzeugenden Zugspannungen im jungen Beton [20, 83].
 2. Eberhardt et al. [58] geben folgende Anhaltswerte für die Schwinddehnungen an:
 Nach 20 Stunden $\epsilon_{20h}^s = 20 \cdot 10^{-6}$, nach 80 Stunden $\epsilon_{80h}^s = 65 \cdot 10^{-6}$.

Um Aussagen über das Rißrisiko treffen zu können, genügt es, näherungsweise mit mittleren Schwinddehnungen zu rechnen, die in den Normen angegeben sind [z.B. 43, 52, 65]. Zilch et al. [250] geben für die Schwinddehnungen nach DIN 1045-1 einen Variationskoeffizienten von 35 % an, woraus der stark streuende Charakter dieser Werkstoffeigenschaft ersichtlich ist. Treten zwangbedingte Risse erst vier Wochen oder später nach dem Betonieren auf, so ist in der Regel davon auszugehen, daß die ursprünglich im System vorhandenen Spannungen aus abfließender Hydratationswärme kleiner als die Betonzugfestigkeit waren, daß jedoch eine relativ geringe zusätzliche Beanspruchung aus Schwinden in der Überlagerung mit den teilweise durch Relaxation abgebauten hydratationsbedingten Spannungen den ersten Riß erzeugt hat. Schwinden wirkt somit bei verformungsbehinderten Bauteilen zwar oft rißauslösend, stellt aber nur einen Teil der Rißursache dar.

3.4 Hydratationsabhängigkeit der bruchmechanischen Werkstoffeigenschaften

3.4.1 Einaxiale Druckfestigkeit

Wie bereits an mehreren Stellen erwähnt, spielt das Druckversagen bei den betrachteten Problemstellungen des frühen Temperaturzwanges keine Rolle. Allerdings wird die Entwicklung der einaxialen Druckfestigkeit wegen der einfacheren versuchstechnischen Bestimmung oft als Leitwert für die Entwicklung anderer Werkstoffkennwerte verwendet. Eine kurze Betrachtung erscheint außerdem aus Gründen der Vollständigkeit des Werkstoffmodells angebracht.

Nach dem CEB/FIP MC 90 [43] ist die Druckfestigkeit bezogen auf die 28-Tage-Festigkeit durch folgende Gleichung in Abhängigkeit des echten Betonalters t [d] gegeben:

$$\frac{f_{cc}(t)}{f_{cc, 28d}} = \exp \left[s \left(1 - \sqrt{\frac{28}{t}} \right) \right] \quad (3.17)$$

Der Parameter s berücksichtigt dabei die Zementart bzw. indirekt die Hydratationsbedingungen:

- Schnell erhärtender Zement (hohe Temperaturen): $s = 0.20$ $f_{cc, \infty} = 1,22 \cdot f_{cc, 28d}$
- Normal erhärtender Zement (normale Temperaturen): $s = 0.25$ $f_{cc, \infty} = 1,28 \cdot f_{cc, 28d}$
- Langsam erhärtender Zement (niedrige Temperaturen): $s = 0.38$ $f_{cc, \infty} = 1,46 \cdot f_{cc, 28d}$

Gleichung (3.17) sollte allerdings nur als Näherung zur Abschätzung benutzt werden, da wesentliche Faktoren, wie der Wasser-Zement-Wert, die Zuschlagsart und -form sowie die Lagerungsbedingungen keine Berücksichtigung finden.¹

Für eine programmtechnische Umsetzung ist eine Formulierung der Druckfestigkeit in Abhängigkeit des Hydratationsgrades zweckmäßig. Laube erreicht dies, indem er die Druckfestigkeit auf die Zugfestigkeit bezieht, die in Abhängigkeit von α angegeben wird (Abschnitt 3.4.2):

1. Eine ausführliche Diskussion mit Angabe weiterer, jedoch prinzipiell ähnlich aufgebauter Ansätze findet man bei Emborg [63].

$$\hat{\beta}_{cc}(\alpha) = \frac{f_{cc}(\alpha)}{f_{cc, \alpha=1}} = 0,85 \frac{\hat{\beta}_{ct}(\alpha)^{3/2}}{c \cdot f_{ct, \alpha=1}} \quad (3.18)$$

Der Parameter c ergibt sich aus dem Grenzübergang für $\alpha = 1$ zu $c \cong 0,236$.

Hamfler [87] und Kishi/Maekawa [109] geben jeweils lineare Zusammenhänge zwischen Hydratationsgrad und Betondruckfestigkeit an. Das Vorgehen von Laube scheint jedoch gerade für jungen Beton experimentell besser abgesichert zu sein [83]. Onken und Rostásy [155] vereinfachen Gleichung (3.18) und eliminieren die Abhängigkeit von der absoluten Größe der Zugfestigkeit. Man erhält damit einen sehr einfachen Ansatz für die bezogene Druckfestigkeit:

$$\frac{f_{cc}(\alpha)}{f_{cc, \alpha=1}} = \frac{\alpha - \alpha_0}{1 - \alpha_0}^{3/2} \geq 0 \quad (3.19)$$

Damit verbleibt als einziger Modellparameter der Hydratationsgrad α_0 , ab welchem Festkörpereigenschaften einsetzen.

Der Verlauf der Erhärtungstemperatur beeinflusst die Entwicklung und die Größe der endgültigen Betondruckfestigkeit maßgeblich [30]. Allgemein kann gesagt werden: Je höher die Temperaturen, desto schneller vollzieht sich die Festigkeitssteigerung, aber desto geringer fällt die Druckfestigkeit des erhärteten Betons aus. Die Geschwindigkeit der Festigkeitssteigerung wird bei Ansätzen in Abhängigkeit des Hydratationsgrades automatisch berücksichtigt. Die absolute Bezugsgröße $f_{cc, \alpha=1}$ wird entweder durch Versuche mit Betonwürfeln, die unter Bauteilbedingungen gelagert wurden, oder durch Extrapolation, z.B. mit den bei Gleichung (3.17) angegebenen Faktoren, bestimmt. Der Übergang zur Druckfestigkeit bei mehraxialer Beanspruchung erfolgt beim jungen Beton in der vom erhärteten Beton bekannten Art und Weise [162].

3.4.2 Einaxiale Zugfestigkeit

3.4.2.1 Zugfestigkeit des erhärteten Betons

Der Begriff Zugfestigkeit f_{ct} bezieht sich nach DIN 1045-1 [52] auf den einaxialen, zentrischen Zug. Zilch et al. [250] geben für f_{ct} einen Variationskoeffizienten von 18 % beim erhärteten Beton an. Dies kann als untere Grenze für die Streuungen der Zugfestigkeit des jungen Betons angesehen werden. Rechnerisch wird die mittlere Zugfestigkeit nach EC2 [65], DIN 1045-1 [52] und ähnlich auch nach MC 90 [43] aus der charakteristischen Zylinderdruckfestigkeit mit

$$f_{ctm} = 0,30 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (3.20)$$

bestimmt. Die für die Rißbreitenbemessung interessierenden Fraktilwerte werden folgendermaßen angegeben:

$$5 \% \text{ - Fraktilwert: } f_{ctk, 0,05} = 0,7 \cdot f_{ctm} \quad (3.21)$$

$$95 \% \text{ - Fraktilwert: } f_{ctk, 0,95} = 1,3 \cdot f_{ctm} \quad (3.22)$$

Dabei ist $f_{\text{ctk},0,05}$ für die Beurteilung des Rißrisikos heranzuziehen. König und Tue [115] schlagen vor, für die Rißbreitenbeschränkung von f_{ctm} auszugehen, da der Riß an einer lokalen Fehlstelle entsteht, und ein Ansatz von $f_{\text{ctk},0,95}$ zu ungünstig wäre (vgl. Abschnitt 7.4). Für Standardbetone können die besagten Werte der DIN 1045-1 [52] entnommen werden. Es ist allerdings zu beachten, daß in sehr vielen Fällen Überfestigkeiten des ausgeführten Konstruktionsbetons vorhanden sind. Außerdem sind viele maßgebende Einflüsse in der Normenregelung, die von der Druckfestigkeit ausgeht, nicht erfaßt, wie z. B. die Form der verwendeten Zuschläge (glatt oder gebrochen). Deshalb ist es, wenn möglich, vorzuziehen, die Betonzugfestigkeit unter Bauwerksbedingungen durch Versuche festzustellen.

3.4.2.2 Entwicklung der Zugfestigkeit während der Hydratation

Der möglichst genauen Erfassung der Entwicklung der Betonzugfestigkeit kommt bei der Beurteilung des Rißrisikos und der Rißbreitenberechnung von Bauteilen unter frühem Temperaturzwang ohne Zweifel eine große Bedeutung zu. Leider erkennt man schon aus den Grenzwerten nach MC 90 [43] die große Streubreite dieser Größe in Abhängigkeit der charakteristischen Zylinderdruckfestigkeit:

$$\min f_{\text{ct}} = 0,20 \cdot f_{\text{ck}}^{2/3} \quad (3.23)$$

$$\max f_{\text{ct}} = 0,40 \cdot f_{\text{ck}}^{2/3} \quad (3.24)$$

Zusammen mit dem Ansatz für die Betondruckfestigkeit nach Gleichung (3.17) kann die Zugfestigkeitsentwicklung abgeschätzt werden.

Laube [126] leitet aus seinen Versuchen einen linearen Zusammenhang zwischen Hydratationsgrad und der mittleren Zugfestigkeit ab. Onken und Rostásy [155] haben denselben Zusammenhang in eine mathematisch elegantere Form gebracht:

$$\hat{\beta}_{\text{ct}} = \frac{f_{\text{ct}}(\alpha)}{f_{\text{ct}, \alpha = 1}} = \frac{\alpha - \alpha_0}{1 - \alpha_0} \geq 0 \quad (3.25)$$

Dabei ist α_0 der Hydratationsgrad, ab dem eine meßbare Zugfestigkeit auftritt. Falls keine Versuchsergebnisse vorliegen, kann der theoretische Endwert der Zugfestigkeit $f_{\text{ct}, \alpha = 1}$ näherungsweise mit einem Umrechnungsfaktor aus der 28-Tage-Festigkeit bestimmt werden. Aus den Versuchsergebnissen von Laube¹ ergibt sich eine Steigerung der Kurzzeit-Zugfestigkeit nach 365 Tagen um etwa 50 % gegenüber der 28-Tage-Festigkeit.

Eine Schädigungshypothese, die ein Abnehmen der absoluten Zugfestigkeit infolge lang andauernder Zugbelastung postuliert, wird nicht explizit eingeführt. Nach Emborg [63] ist für sehr langsame Belastungsgeschwindigkeiten und somit lang andauernde Zugbeanspruchung eine Reduzierung der Zugfestigkeit um bis zu 35 % gegenüber der Endfestigkeit möglich. Bei den vorliegenden Zwangproblemen kann vereinfachend angenommen werden, daß die Steigerung der Endzugfestigkeit gegenüber der 28-Tage-Festigkeit sich mit diesem Effekt in etwa aufhebt ($1,5 \cdot 0,7 \approx 1,0$), so daß die Kurzzeit-Zugfestigkeit nach 28 Tagen als Bezugsgröße in Gleichung (3.25) eingesetzt werden darf. Nach Versuchen von Gutsch und Rostásy [85] hat eine lang anhaltende Zugbelastung bei

1. Siehe Abb. 8.3 und 8.4 in [126].

anschließender Entlastung und Test der Kurzzeit-Zugfestigkeit allerdings keine feststellbaren Abminderungen gegenüber vorher unbelasteten Proben ergeben.

Eine sehr ausführliche Zusammenstellung der Einflüsse auf die im Bauwerk wirksame Betonzugfestigkeit findet sich im Heft 449 des DAfStb [155]. Dort wird auch die Berücksichtigung des Betonalters nach Heft 400 [187] diskutiert. Die wirksame Betonzugfestigkeit kann demnach vereinfacht wie folgt ermittelt werden:

$$f_{ct, ef} = k_E \cdot k_{z, t} \cdot 0,3 f_{ck, cube}^{2/3} \quad (3.26)$$

Der Faktor $k_{z, t}$ berücksichtigt die zeitliche Entwicklung der Zugfestigkeit und ist tabellarisch angegeben:

| Beiwert $k_{z, t}$ | Betonalter [d] | | | |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------------|------|-----|------|
| | 3 | 7 | 28 | 90 |
| niedrige Erhärtungstemperaturen (z. B. infolge langsam erhärtender Zemente) | 0.4 | 0.6 | 1.0 | 1.2 |
| normale Erhärtungstemperaturen | 0.5 | 0.75 | | 1.1 |
| hohe Erhärtungstemperaturen (z. B. bei massigen Betonbauteilen) | 0.7 | 0.9 | | 1.05 |

Tabelle 3.2: Beiwerte $k_{z, t}$ zur Berücksichtigung der zeitlichen Entwicklung der Betonzugfestigkeit [187].

Der Beiwert k_E stellt den Einfluß von Eigenspannungen auf die effektive Zugfestigkeit bei Zwangsbeanspruchung dar. Werden die Eigenspannungen rechnerisch mit erfaßt, so ist 1.0 einzusetzen. Ansonsten ist der Wert je nach Bauteildicke zwischen 0.8 ($d < 0.3$ m) und 0.6 ($d > 0.8$ m) zu interpolieren. Zusammenfassend ist die Regelung nach Heft 400 in Abb. 3-3 dargestellt. Zwar betonen Onken und Rostásy [155], daß sich der Verlauf an der Druckfestigkeit orientiert und die etwas schnellere Entwicklung der Zugfestigkeit nicht berücksichtigt, trotzdem stellt diese Methode für Überschlagsberechnungen eine sinnvolle Ergänzung zu den genaueren Formeln in Abhängigkeit des Hydratationsgrades dar.

3.4.3 Bruchenergie

Bei der numerischen Simulation des Zugversagens von Beton hat sich die Bruchenergiemethode weitgehend durchgesetzt. Betrachtet man den Zusammenhang zwischen der Spannung σ , die normal zu einem Riß übertragen wird, und der Rißöffnung w in einem weggesteuerten Zugversuch, so ergibt sich qualitativ der in Abb. 3-4a dargestellte Verlauf. Die Fläche unter der Funktion $\sigma(w)$, die auch als *tension softening* Kurve bezeichnet wird, ist die auf die Einheitsquerschnittsfläche bezogene spezifische Bruchenergie G_f [Nm/m^2]:

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma(w) dw \quad (3.27)$$

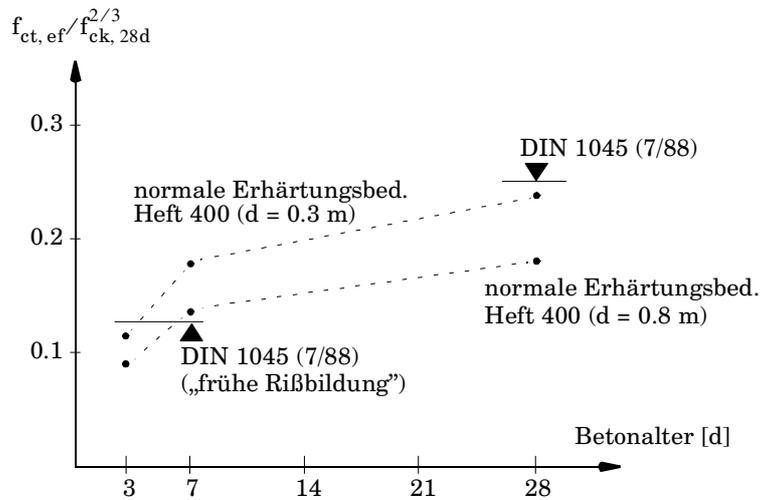


Abb. 3-3: Bezogene Betonzugfestigkeit: Vergleich Heft 400 DAfStb mit DIN 1045 (7/88). (Umrechnung der Druckfestigkeiten nach [131]).

Für die Beziehung zwischen Rißöffnung und Rißspannung $\sigma(w)$ wurden verschiedene Funktionen vorgeschlagen. Nur wenige Untersuchungen beinhalten jedoch eine Abhängigkeit vom Hydratationsgrad. Für die Gleichung, die Huckfeldt [97] und Laube [126] verwenden, sind 7 Eingangsparameter notwendig, deren experimentelle Bestimmung für die meisten praktischen Fälle zu aufwendig sein dürfte. Gutsch [83] schlägt eine vollständige, in drei Bereiche unterteilte Spannungs-Dehnungsline für jungen Beton im Zugbereich vor, deren Parameter sich aus Bruchenergie, Prozeßzonlänge und Zugfestigkeit errechnen lassen.

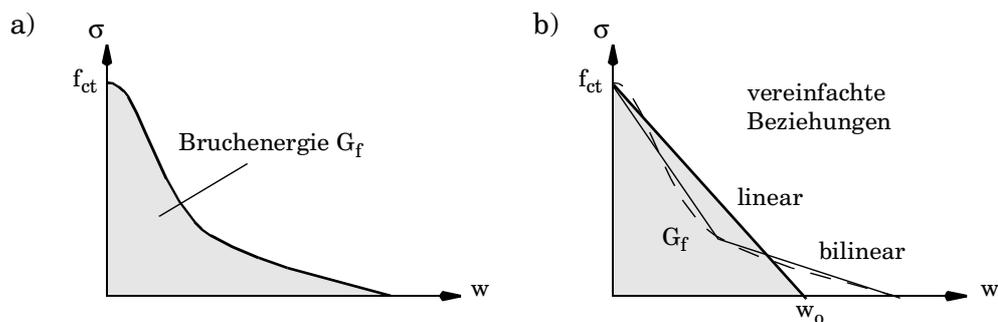


Abb. 3-4: Spannungs-Rißöffnungsbeziehung: a) schematisch, b) vereinfacht.

Bedenkt man die Unsicherheiten des Rechenmodells und insbesondere der Materialparameter, so erscheint es durchaus gerechtfertigt, eine vereinfachte lineare oder bilineare Beziehung nach Abb. 3-4b zu verwenden. Bei der linearen Beziehung ist neben der ohnehin hydrationsgradabhängig definierten Zugfestigkeit f_{ct} als einzig weiterer Modellparameter entweder die Bruchenergie $G_f(\alpha)$ oder die Rißbreite $w_0(\alpha)$ notwendig, ab der keine Normalspannungen mehr übertragen werden. Ein linear abfallender Ast bietet darüberhinaus auch numerische Vorteile [162]. Da die Größe w_0 fiktiv ist und nicht direkt gemessen werden kann, erscheint es naheliegend, die Bruchenergie $G_f(\alpha)$ als Modellparameter zu verwenden. Ziel des Bruchenergiekonzeptes ist es, objektive Resultate unabhängig von

der Probengröße im Versuch und der Elementgröße in der Rechnung zu ermöglichen. Leider liegen nur relativ wenige Berichte über Versuchsergebnisse für jungem Beton vor. In Abb. 3-5 sind die Daten aus dem RILEM-Bericht [63] wiedergegeben. Weitere Versuchsergebnisse finden sich bei Braemshuber [30]. Hofstetter/Mang [93] geben einen Bereich von 50-200 Nm/m² für erhärteten Beton an, wohingegen Feenstra [69] diesen auf 75-150 Nm/m² einschränkt.

Im Model Code 90 [43] wird die Bruchenergie für Zugversagen in Abhängigkeit der mittleren Druckfestigkeit und des Größtkorndurchmessers angegeben, wobei eine Streuung im Bereich von ±30 % anzunehmen ist. Für $D_K = 32$ mm ergibt sich z.B.:

$$G_f = 11,6 \cdot f_{cm}^{0,7} \quad [\text{Nm/m}^2] \quad (3.28)$$

Es ist nicht erwähnt, ob diese Formel auch für jungen bzw. erhärtenden Beton angewendet werden kann. Wenn ja, würde das bedeuten, daß die Entwicklung der Bruchenergie in etwa analog zur Entwicklung der Zugfestigkeit abläuft (vgl. Gleichung (3.20)).

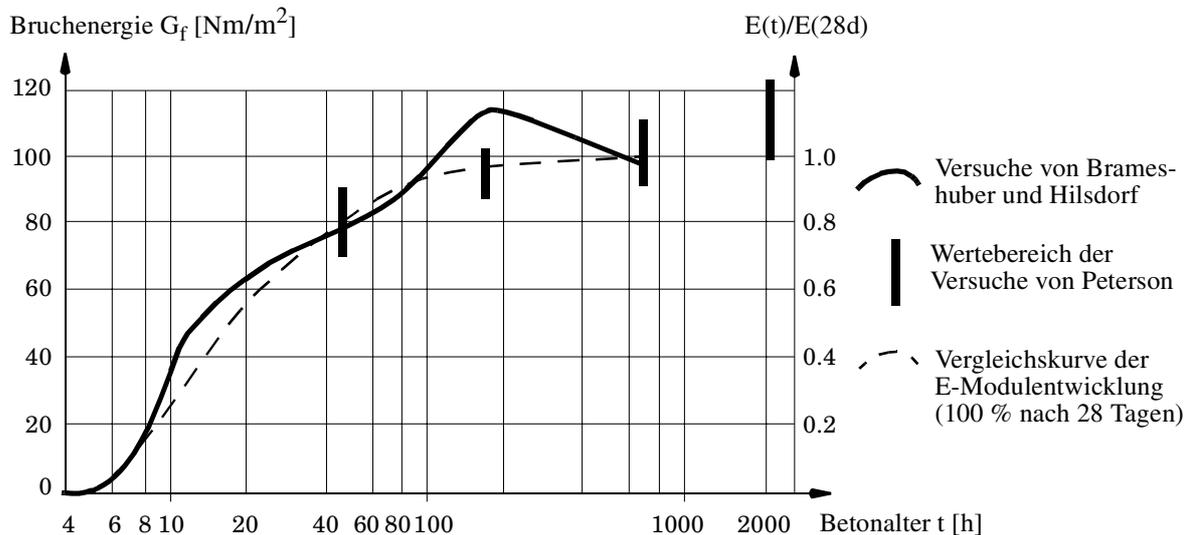


Abb. 3-5: Entwicklung der Bruchenergie für erhärtenden Beton (nach [62] und [63]).

In Abb. 3-5 ist zum Vergleich die Entwicklung des Elastizitätsmoduls aus Abb. 3-6 nach Weigler/Karl [235] eingetragen. Es ist durchaus angebracht, einen Vergleich für zwei verschiedene Betone in Frage zu stellen, trotzdem ist die prinzipielle Gemeinsamkeit im Verlauf augenfällig. Es wird deshalb hier vorgeschlagen, für den Verlauf der Bruchenergie einen entsprechenden Ansatz wie für die Steifigkeitsentwicklung in Abhängigkeit des Hydratationsgrades zu wählen (vgl. Abschnitt 3.3.2):

$$G_f(\alpha) = G_{f,\infty} \frac{E(\alpha)}{E_\infty} = G_{f,\infty} \frac{\alpha - \alpha_0}{1 - \alpha_0}^{2/3} \quad (3.29)$$

Gutsch [83] gibt einen formal ähnlichen Ansatz an, bestimmt jedoch den Exponenten experimentell zu 0.72, was sich in guter Übereinstimmung mit dem Vorschlag gemäß Gleichung (3.29) befindet.

3.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wird die Veränderlichkeit der thermischen und mechanischen Werkstoffparameter während der Hydratation behandelt, welche von entscheidender Bedeutung für die frühen Zwangsspannungen sind. Während die thermischen Kenngrößen λ und c_p sowie die Querdehnzahl ν und der Temperaturexpansionskoeffizient α_T in guter Näherung als konstant angenommen werden können, trifft dies auf den Elastizitätsmodul E , die Druckfestigkeit f_{cc} , die Zugfestigkeit f_{ct} und die Bruchenergie G_f nicht zu. Für diese Größen werden Ansätze in Abhängigkeit der Zeit und des Hydratationsgrades aus der Literatur vorgestellt. Es zeigt sich, daß sinnvollerweise von den Erhärtungsbedingungen unabhängige Ansätze in Abhängigkeit des Hydratationsgrades zur Anwendung kommen, welche vor allem auf Arbeiten aus dem Braunschweiger Baustoffinstitut basieren [83, 126, 155]. Als einzige Werkstoffparameter sind für diese Ansätze der Endwert der jeweiligen Größe bei abgeschlossener Hydratation sowie der Hydratationsgrad α_o , ab welchem meßbare Festkörpereigenschaften auftreten, erforderlich. Zusammenfassend ist in Abb. 3-6 die Entwicklung der maßgebenden Werkstoffparameter a) über der Zeit exemplarisch, d.h. nicht auf andere Erhärtungsbedingungen übertragbar, sowie b) über dem Hydratationsgrad aufgetragen.

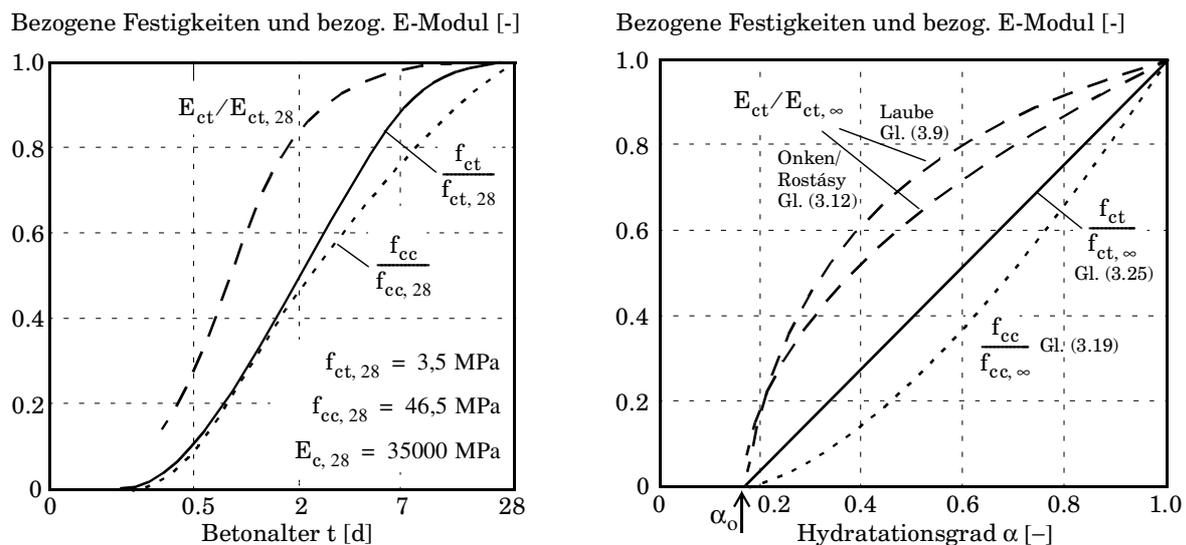


Abb. 3-6: Entwicklung der wichtigsten Werkstoffkennwerte: a) nach Weigler und Karl [235], b) nach Laube [126] und Onken/Rostásy [154]. (Gleichungen 3.9, 3.12, 3.19, 3.25)

Neuere Versuchsergebnisse von Gutsch [83] legen nahe, daß die tatsächliche Entwicklung der mechanischen Größen beim Hydratationsgrad α_o nicht plötzlich einsetzt, sondern ähnlich wie in Abb. 3-6a allmählich mit einer horizontalen Tangente startet. Zur quantitativen Erfassung sind allerdings noch weitere Versuche notwendig, so daß in [83] empfohlen wird, mit den in Abb. 3-6b dargestellten Verläufen zu arbeiten, zumal sich die Abweichung nur auf einen relativ kleinen Ausschnitt erstreckt. Gutsch macht auch erste Schritte zur Definition probabilistischer anstatt deterministischer Werkstoffparameter für das Verhalten jungen Betons. So ist z.B. der Variationskoeffizient von Betonzug- und Betondruckfestigkeit nicht konstant sondern abhängig vom Hydratationsgrad, wobei für quantitative Aussagen bisher zu wenig Versuche durchgeführt wurden [83]. Für die Erarbeitung entsprechender Werkstoffmodelle bedarf es noch erheblicher Forschungsanstrengungen.

Kapitel 4

Elastizität und Viskoelastizität alternder Werkstoffe

4.1 Einleitung

Dieses Kapitel behandelt in erster Linie nichtlinear-elastische und viskoelastische Werkstoffgesetze für erhärtenden Beton. Zum Verständnis und zur theoretischen Ableitung dieses Problemkreises ist es vorteilhaft, nicht nur den Fall der zeitlich zunehmenden Steifigkeit, sondern auch den Fall der zeitlich abnehmenden Steifigkeit zu behandeln. Es wird deshalb zwischen Erhärtung und Schädigung unterschieden, wobei unter Erhärtung eine isotrope Erhöhung und unter Schädigung eine isotrope Reduktion der Werkstoffsteifigkeit verstanden wird, welche unabhängig vom Spannungszustand auftritt. Beispiele für diese Art von Schädigung sind temperaturbedingtes Schmelzen bzw. Aufweichen oder eine altersbedingte Schwächung des Materials [3], wohingegen Effekte aufgrund dauerhaft hoher Spannungen oder Wechselbeanspruchung nicht in diese Kategorie fallen.

Als Oberbegriff für die hier behandelten Problemstellungen kann die *Alterung* von Werkstoffen angesehen werden. Im Sinne einer induktiven Herleitung werden Erhärtung und Schädigung zunächst jeweils getrennt betrachtet, was auf verschiedene Theorien führt. Da jedoch auch Probleme denkbar sind, bei denen beide Alterungsphänomene gleichzeitig auftreten, z.B. wenn Beton unter sehr hohen Temperaturen erhärtet, wird darauf aufbauend jeweils ein verallgemeinertes, nichtlinear-elastisches bzw. viskoelastisches Stoffgesetz abgeleitet.

Historisch gesehen legte Boltzmann 1874 mit dem nach ihm benannten Superpositionsprinzip den Grundstein zur Berechnung viskoelastischer Verformungen. Speziell bei Beton wurde das Kriechen zum erstenmal von Woolson 1905 beobachtet und von Davis und Glanville 1930 systematisch untersucht [178]. Ein theoretischer Meilenstein ist die Veröffentlichung Dischingers aus dem Jahre 1937, in der erstmals eine Differentialgleichung zur Beschreibung des zeitabhängigen Verhaltens des erhärteten Betons auf Grundlage einer Kriechfunktion vorgeschlagen wird. Dischinger erweitert 1939 seine Theorie so, daß auch die Erhärtung des Betons berücksichtigt wird [55]. Nachfolgende Forschungsarbeiten beschäftigen sich v.a. mit Erweiterungen der theoretischen Grundlagen, mit dem Aufstellen von Kriechfunktionen oder mit der rechnerischen Umsetzung. Wesentliche Beiträge zu allen diesen Themen leistete Bažant, dessen Veröffentlichungen die Grundlage der Ausführungen in diesem Kapitel darstellen. Trotz intensiver Forschungen sind einige Aspekte der Beschreibung des Kriechverhaltens von Beton und der rechnerischen Umsetzung noch nicht abschließend geklärt. Eine verallgemeinerte viskoelastische Theorie zur Beschreibung von Erhärtung und Schädigung existiert nach Wissen des Verfassers bis dato nicht.

4.2 Nichtlinear–elastische Werkstoffmodelle

4.2.1 Verformungsverhalten des hydratisierenden Betons

Während bei Berechnungen von erhärtetem Beton mit großem Aufwand das nichtlineare Verhalten bei Druckbeanspruchungen abgebildet wird, kann bei den zu untersuchenden Beanspruchungszuständen des hydratisierenden Betons ohne Einschränkung ein linear-elastisches Verhalten im Druckbereich vorausgesetzt werden. Die plastischen Dehnungen, welche die Temperaturerhöhung im Frischbeton v.a. bei dünnen Querschnitten hervorruft, sind für die später relevante Zugbeanspruchung von untergeordneter Bedeutung.

Sowohl bei Druck- als auch bei Zugbeanspruchungen ist durch geeignete zeitabhängige Modelle das viskose Verhalten des Betons zu beschreiben, wobei oft abhängig von den Verformungsrandbedingungen zwischen Kriechen und Relaxation unterschieden wird. Bei Zugbeanspruchung ist dem spröden Verhalten des Betons durch geeignete bruchmechanische Modelle Rechnung zu tragen. Auf Bažant [17] geht ein von vielen Forschern [z.B. 135, 237] benutztes Modell für die Analyse des Betons unter Zugbeanspruchung zurück (Abb. 4-1). Das Modell geht von der additiven Zerlegung der Gesamtverzerrungsraten in elastische, viskose, thermische, schwindabhängige und rißbedingte Anteile aus:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^\varphi + \boldsymbol{\varepsilon}^\vartheta + \boldsymbol{\varepsilon}^s + \boldsymbol{\varepsilon}^r \quad (4.1)$$

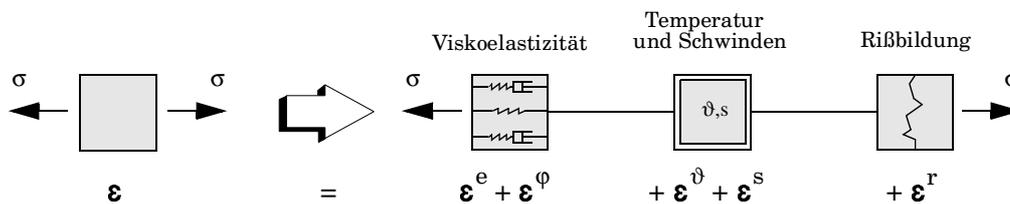


Abb. 4-1: Modellvorstellung für die Verformungsanteile des Betons bei Zugbeanspruchung.

Als Besonderheit beim jungen Beton tritt eine mehr oder weniger stark ausgeprägte Abhängigkeit der Parameter vom Hydratationsgrad auf. Für die Beschreibung des Materialverhaltens bei veränderlicher Steifigkeit sind spezielle Stoffgesetze notwendig, die einiger Vorüberlegungen bedürfen. Als einfaches Beispiel wird ein elastischer Körper betrachtet, der zum Zeitpunkt t_0 belastet wird, so daß sich ein Spannungszustand σ_0 mit Verzerrungen $\varepsilon_0(\sigma_0, E_0)$ einstellt (Abb. 4-2). Dieser Körper wird nun in einem Gedankenexperiment zunächst aufgeweicht, z.B. durch einen Schmelzvorgang, wobei Temperaturdehnungen nicht betrachtet werden. Aus der physikalischen Realität ist bekannt, daß sich dadurch zusätzliche Dehnungen $\Delta\varepsilon(\sigma_0, \Delta E/E_0)$ einstellen, die proportional zur Abminderung der Steifigkeit sind. Nun soll der Körper wieder auf seine Ausgangssteifigkeit erhärten. Ein reales Experiment würde zeigen, daß die aufgetretenen Dehnungen $\Delta\varepsilon$ dabei nicht etwa rückgängig gemacht werden, sondern daß die Erhärtung unter Aufrechterhaltung des Spannungszustandes verformungsfrei erfolgt. Das elastische Durchlaufen eines Steifigkeitszyklus ist also im allgemeinen mit irreversiblen Verformungen verbunden und gehorcht offensichtlich je nach Vorzeichen der Steifigkeitsänderung unterschiedlichen Gesetzen. Im folgenden werden nichtlinear-elastische Werkstoffmodelle im Hinblick auf die Beschreibung der oben beispielhaft geschilderten Vorgänge untersucht.

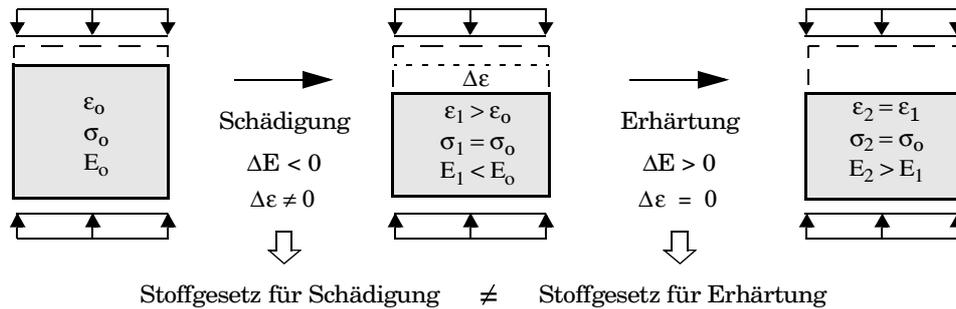


Abb. 4-2: Verformungsverhalten bei Schädigung und Erhärtung.

4.2.2 Hyperelastische Modelle

Nach Chen/Han [41] kann ein nichtlinear-elastisches Modell, das reversibel und unabhängig vom Lastpfad ist, wie folgt beschrieben werden:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\epsilon_{kl}) \tag{4.2}$$

Damit sichergestellt ist, daß beim Durchfahren verschiedener Be- und Entlastungszyklen keine Energie erzeugt wird, wird über die Definition eines pfadunabhängigen Potentials U gefordert:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \tag{4.3}$$

Das so beschriebene Material wird *hyperelastisch* genannt (Abb. 4-3). Die Dehnungen sind stets eindeutig mit den Spannungen verknüpft. Werden z.B. Schmelzvorgänge von Stahl oder Beton mit hyperelastischen Werkstoffmodellen beschrieben, so geht man davon aus, daß die Steifigkeit bei hohen Temperaturen abnimmt. In Verbindung mit den oben beschriebenen Definitionen bedeutet dies, daß sich ohne Spannungsänderungen Deformationen einstellen, da die in Abb. 4-3 dargestellte Kurve mit einem Faktor gestaucht wird. Man erkennt an diesem Beispiel sofort, daß dieses Modell zur Beschreibung von Erstarrungsvorgängen ungeeignet ist, da konsequenterweise beim Erstarren die Verformung des Schmelzens wieder rückgängig gemacht würde. Aus dem gleichen Grund ist diese Modellvorstellung auch für die Beschreibung von Erhärtungsvorgängen bei Beton ungeeignet.

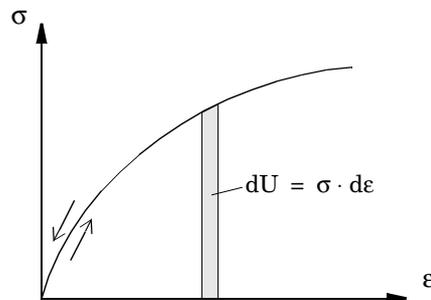


Abb. 4-3: Hyperelastisches Werkstoffverhalten (einxiale Darstellung).

4.2.3 Inkrementelle Beschreibung (Hypoelastisches Modell)

Wenn der Spannungszustand nicht nur von der aktuellen Dehnung abhängt, sondern auch von der Lastgeschichte, erfolgt eine Formulierung des Modells über die Spannungsraten:

$$\dot{\sigma}_{ij} = F_{ij}(\dot{\epsilon}_{kl}, \sigma_{mn}) \quad (4.4)$$

Für zeitunabhängige Materialmodelle kann diese Beziehung in die inkrementell lineare Form

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\sigma_{mn}) \cdot d\epsilon_{kl} \quad (4.5)$$

überführt werden, wobei der tangente vierstufige Steifigkeitstensor $E_{ijkl}(\sigma_{mn})$ nur abhängig vom Spannungszustand ist [41]. Diese nur im Inkrement reversible Formulierung wird als *hypoelastisch* bezeichnet. Implizit lautet die nach den Dehnungen umgeformte Beziehung mit Einführung der inversen Werkstoffmatrix $\mathbf{D} = \mathbf{E}^{-1}$:

$$d\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \quad (4.6)$$

Im allgemeinen ist nicht sichergestellt, daß ein hypoelastisches Modell die Hauptsätze der Thermodynamik erfüllt.

4.2.4 Nichtlineare Elastizität bei Schädigung

Der Begriff Schädigung wird in dieser Arbeit als isotrope Abnahme der elastischen, makroskopisch definierten Steifigkeit verstanden, die infolge äußerer Einflüsse und unabhängig vom Spannungszustand stattfindet [39]. Typische Beispiele sind Schmelz- und Aufweichvorgänge infolge hoher Temperaturen [3], aber auch Alterungserscheinungen.¹ Schädigungsvorgänge sind damit grundsätzlich von Plastifizierungen oder Bruchvorgängen zu unterscheiden, welche in erster Linie in Abhängigkeit der Festigkeit und nicht der Steifigkeit beschrieben werden.

Von Kachanov wurde 1958 erstmals ein Schädigungsmodell vorgeschlagen, aus dem die Kontinuums-Schädigungsmechanik (*Continuum Damage Mechanics*) hervorgegangen ist [106, 127]. Danach kann die Schädigung auch als mikroskopische Abminderung der effektiven Querschnittsfläche gedeutet werden, auf welche die Spannungen bezogen sind. Dies führt auf das Konzept der effektiven Spannung, die auf die verbleibende Querschnittsfläche bezogen ist:

$$\sigma_{\text{eff}} = \frac{P}{A_0 - \Delta A} = \frac{P}{A_0(1 - \delta)} = \frac{\sigma}{1 - \delta} \quad (4.7)$$

Hierbei ist die skalare Größe δ , die als Schädigungsgrad bezeichnet wird, der Anteil der geschädigten Querschnittsfläche am makroskopischen Querschnitt.² Der Schädigungsgrad beträgt Null für ungeschädigtes Material und geht gegen Eins für den Grenzfall der völligen Entfestigung.³ Er steigt definitionsgemäß monoton an, da eine Selbstheilung einer einmal aufgetretenen Schädigung nicht möglich ist:

-
1. Eine Übersicht über weitere Schädigungsdefinitionen und die entsprechenden Modelle gibt z.B. Fleig [74].
 2. In der Literatur wird der Schädigungsgrad oft auch mit D bezeichnet.
 3. Najar [145] zeigt ausgehend von thermodynamischen Überlegungen, daß der rein formale Grenzwert $\delta = 1$ auch nicht annähernd erreicht werden kann. Bereits bei einem material- und belastungsabhängigen Wert deutlich kleiner Eins geht die Materialschädigung in einen lokalen Bruchvorgang über.

$$\delta(t) \in [0, 1) \quad \text{und} \quad \dot{\delta} \geq 0 \quad (4.8)$$

Für die effektive Spannung σ_{eff} gilt das Stoffgesetz des ungeschädigten Materials mit der Steifigkeit \bar{E} :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\bar{E}} = \frac{\sigma}{\bar{E}(1 - \delta)} \quad (4.9)$$

Man erkennt, daß das Materialverhalten unter Beibehaltung der makroskopischen Spannung σ auch durch die Verwendung eines zeitveränderlichen effektiven E-Moduls beschrieben werden kann:

$$E(\delta) = (1 - \delta)\bar{E} \quad (4.10)$$

Aus der Umformung von Gleichung (4.10) ergibt sich die maßgebende Beziehung zur experimentellen Bestimmung des Schädigungsgrades:

$$\delta(t, \vartheta) = 1 - \frac{E(t, \vartheta)}{\bar{E}} \quad (4.11)$$

Da der Einfluß der Temperatur an einen zeitlich veränderlichen Temperaturverlauf $\vartheta(t)$ gebunden ist, kann ohne Einschränkung allein die Abhängigkeit der Schädigung von der Zeit betrachtet werden. Im folgenden wird deshalb angenommen, daß der Schädigungsgrad als monoton mit der Zeit ansteigende Funktion $\delta(t)$ gegeben ist. Das Material verhält sich unter Ansatz des zeitlich veränderlichen effektiven E-Moduls quasi hyperelastisch:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(t)\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}(t)\boldsymbol{\sigma} \quad (4.12)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\mathbf{D}}\boldsymbol{\sigma} \quad (4.13)$$

Die inkrementelle Form (4.13) wird z.B. von de Borst und Peeters [28] verwendet, um das Tragverhalten von Beton unter extremen Temperaturbeanspruchungen, z.B. bei Bränden, zu beschreiben. Aus Gleichung (4.13) geht hervor, daß sich bei konstantem Spannungszustand ($\dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0$) Dehnungsänderungen aufgrund der Steifigkeitsänderung einstellen. Dieser Ansatz eignet sich also für die Beschreibung von Schädigungsvorgängen, jedoch nicht für Erhärtungsvorgänge.

Als Beispiel soll nochmals die Scheibe aus Abb. 4-2 unter konstanter einaxialer Spannung σ_0 dienen. Die Annahme einer linearen Abnahme der Sekantensteifigkeit $E(t) = (1 - at)\bar{E}$ mit $t \in [0; 1/a)$ führt zu einer Steifigkeitsrate $\dot{E} = -a\bar{E}$. Die Dehnungsrate ist demnach:

$$\dot{\varepsilon}^e = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sigma}{E} = \underbrace{\frac{\dot{\sigma}}{E}}_{=0} - \sigma \cdot \frac{\dot{E}}{E^2} = \frac{a\sigma_0}{(1 - at)^2 \bar{E}} \neq 0 \quad .$$

Eine Integration von $\dot{\varepsilon}^e$ liefert aufgrund des hyperelastischen Charakters dasselbe Ergebnis wie die totale Formulierung:

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma(t)}{E(t)} = \frac{\sigma_0}{(1 - at)\bar{E}}$$

Die Steifigkeit E ist in diesem Modell als Sekantensteifigkeit zu verstehen. Nur diese kann als Ursprungsmodul eines unbelasteten Probekörpers sinnvoll gemessen und als Eingangsparameter direkt eingesetzt werden. Phänomene mit bereichsweise ansteigender Steifigkeit sind mit der klassischen Schädigungstheorie nicht berechenbar. Deshalb ist für die Anwendung auf ein erhärtendes Material eine verallgemeinerte Theorie erforderlich, die in dieser Arbeit in Abschnitt 4.2.7 vorgestellt wird.

4.2.5 Nichtlineare Elastizität bei Erhärtungsphänomenen

Das im vorherigen Abschnitt geschilderte Modell eignet sich nicht zur Beschreibung von Erhärtungsphänomenen, wie sie gemeinhin in der Natur beobachtet werden, da durch den reversiblen Charakter die Dehnungen infolge der Aufweichung bei der Erhärtung mit umgekehrten Vorzeichen auftreten würden. Sowohl beim Erstarren nach Schmelzvorgängen als auch beim Erhärten von Beton beobachtet man jedoch keine Ausdehnung, wenn der Körper unter Druckspannungen steht. Vielmehr bleibt die Form erhalten, solange sich der Spannungszustand nicht ändert. Von Marx [136] wird das hypoelastische Modell sinngemäß auf den hydratisierenden Beton angewandt:

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\alpha) \cdot d\varepsilon_{kl} \quad \text{bzw.} \quad d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}(\alpha)d\boldsymbol{\sigma} \quad (4.14)$$

Offensichtlich erfüllt dieses Modell die Forderung, daß beim Erhärtungsvorgang lediglich Änderungen im Beanspruchungszustand zu Dehnungsänderungen mit der jeweils aktuellen Steifigkeit führen. Dieser pragmatisch abgeleitete und zugleich richtige Ansatz steht allerdings im Widerspruch zur mathematisch gewonnenen Beziehung nach Gleichung (4.13), die von Huang [96] und Huckfeldt [97] für die Beschreibung hydratisierenden Betons verwendet wird. Huckfeldt kommt bei den Berechnungen zur Verifizierung seines Modells zu dem Schluß, daß der Einfluß des zweiten, von der Änderung der Steifigkeit abhängigen Anteils $\dot{\mathbf{D}}\boldsymbol{\sigma}$ auf die elastische Verzerrungsrate die Ergebnisse in einer ungewünschten Weise beeinflusst. Allerdings führt er dies nicht auf den grundsätzlichen Fehler in der konstitutiven Gleichung, sondern auf eine Vorzeichenabhängigkeit von Temperaturrate, Spannung und Spannungsrate zurück.¹

Die richtige konstitutive Gleichung für die Berechnung erhärtender Betonbauteile erhält man ausgehend von Gleichung (4.13) durch Streichen des Summanden, der bei konstanter Spannung Dehnungsänderungen aus Steifigkeitsänderungen hervorruft [9]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} \quad (4.15)$$

4.2.6 Anschauliche Deutung des Verhaltens bei Erhärtungsprozessen

Aus der phänomenologischen Beschreibung resultiert die anschauliche Vorstellung, daß im jungen Beton nicht das homogene Gefüge seine Steifigkeit vergrößert, sondern daß während des Erhärtungsprozesses nacheinander Verbindungen im Korngerüst geschaffen werden, die zunächst spannungslos sind, und in denen erst durch Kriechen oder Belastungsänderungen Kräfte aktiviert werden. Die Plausibilität dieser Annahme zeigt sich sehr klar an der in Abb. 2-1 auf Seite 8 dargestellten Gefügeänderung im Verlauf der Hydratation. Marx [136] hat als mechanisches Analogon den spannungslosen Einbau von Federn in das rheologische Modell vorgeschlagen, das auch direkt von Lok-

1. Die von Huckfeldt [97] vorgestellten Berechnungsergebnisse wurden durch ‚Vernachlässigung‘ des falschen Terms erzielt und geben damit richtige und wertvolle Hinweise zum Verhalten von hydratisierenden Betonbauteilen. Die Ergebnisse von Huang [96] beruhen dagegen auf falschen Annahmen.

horst und van Breugel [133] benutzt wird, um das Verhalten auf mikrostruktureller Ebene zu simulieren. Als Beispiel für dieses sehr anschauliche Modell wird in Abb. 4-4 die Be- und Entlastung eines erhärtenden Betonwürfels betrachtet.

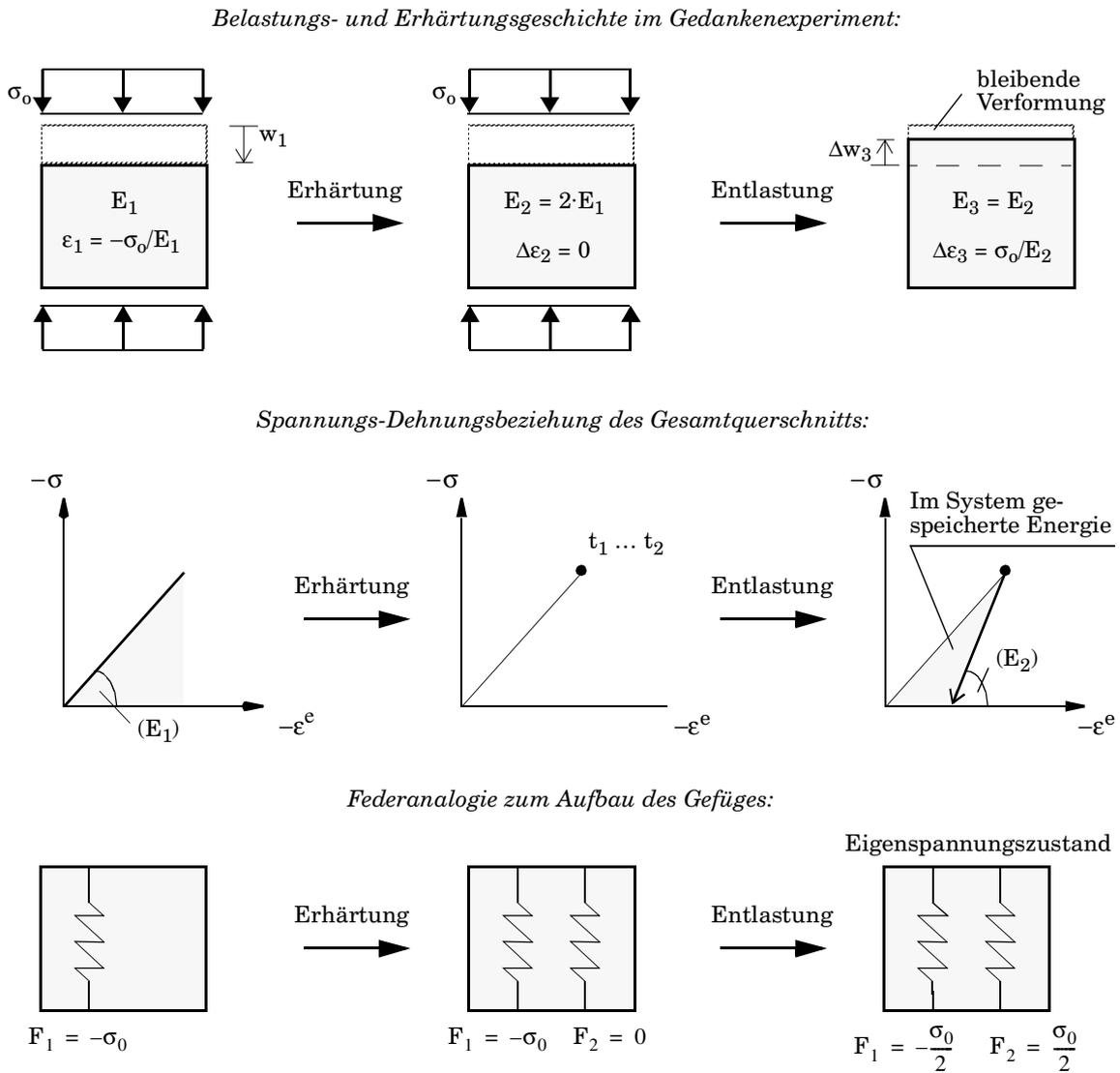
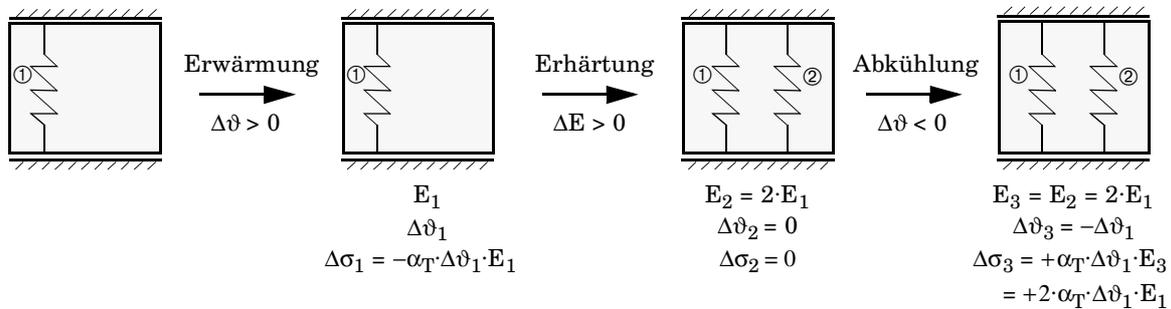


Abb. 4-4: Nichtlinear–elastisches Verhalten bei Erhärtung mit Be- und Entlastung (Beispiel).

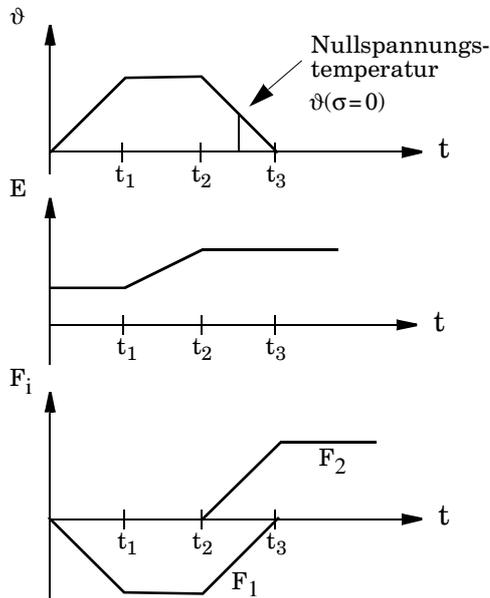
Im Gegensatz zu einer pfadunabhängigen und reversiblen hyperelastischen Formulierung treten bleibende, oft auch als inelastisch bezeichnete Verformungen auf, die nicht etwa plastischer oder viskoser Natur sind, sondern aus der Steifigkeitsänderung resultieren. Dementsprechend geht scheinbar Energie verloren. Tatsächlich ist die Energie durch einen inneren Eigenspannungszustand auf Mikroebene zwischen den älteren und jüngeren Verbindungen gespeichert. Ob und inwieweit dieser Eigenspannungszustand, der bisher in der Literatur nicht untersucht wurde, Einfluß auf das Rißgeschehen oder auf viskose Verformungen hat, eröffnet ein interessantes Forschungsfeld der Baustoffkunde. Über empirische Erklärungsversuche des viskosen Verhaltens von jungem Beton durch hydrationsbedingte Eigenspannungen berichtet Breitenbücher [31]. Quantitative Ergebnisse lassen

jedoch nur die in letzter Zeit vereinzelt anzutreffenden Versuche, das Verhalten von Beton nicht auf Makroebene, sondern differenziert auf Mesoebene zu analysieren, erwarten. Es ist zu vermuten, daß das geschilderte Verhalten die Objektivität gemessener Kriechfunktionen in Frage stellt. Das würde bedeuten, daß eine Kriechfunktion von der Entwicklung des Elastizitätsmoduls abhängig und somit nicht ohne weiteres auf andere Erhärtungsbedingungen übertragbar ist. Einen Ausweg stellen Kriechansätze in Abhängigkeit des Hydratationsgrades dar (vgl. Abschnitt 4.3.3.1). Da dieser Problemkreis nicht Thema dieser Arbeit ist, wird im folgenden von der Objektivität zeitabhängiger Kriechfunktionen ausgegangen.

Insbesondere im Hinblick auf die später zu untersuchenden Zwangspannungen infolge Hydratation ist es interessant, das Verhalten eines erhärtenden, verformungsbehinderten Körpers zu untersuchen. Aus dem in Abb. 4-5 ausführlich dargestellten Beispiel werden die Vorgänge, die bei Erwärmung und Abkühlung im erhärtenden Beton ablaufen, sehr deutlich.



Zeitliche Verläufe:



Spannungs-Dehnungslinie

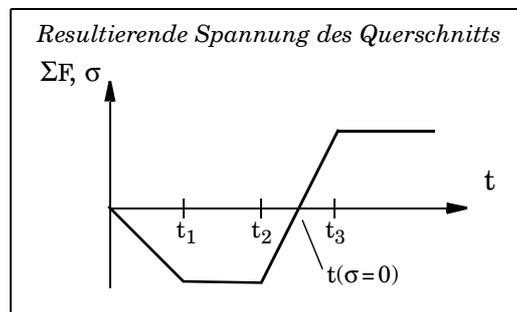
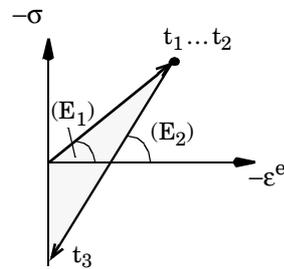


Abb. 4-5: Nichtlinear-elastisches Verhalten bei Erhärtung mit Zwangbeanspruchungen infolge Temperatur.

Die Überlagerung der Federkräfte zu einer resultierenden Spannungskurve zeigt genau denjenigen qualitativen Verlauf, der in der Literatur durch Messungen bestätigt wird (vgl. z. B. [31]). Neu ist die Deutung als inhomogene Spannungsverteilung im Querschnitt. Während einige Verbindungen zwi-

schen den Zuschlagskörnern nach dem Belastungszyklus annähernd spannungslos sind, erhalten diejenigen, die beim Temperaturmaximum aktiv wurden, eine höhere Spannung als der Gesamtquerschnitt. Dies ist wiederum ein Effekt, der hinsichtlich seiner Auswirkung auf das Rißgeschehen einer Untersuchung seitens der Baustoffwissenschaften bedarf. Insbesondere wäre die Frage zu untersuchen, ob der Abfall der Zugfestigkeit bei Zwang [154] in einem Zusammenhang steht.

4.2.7 Vereinheitlichte nichtlinear–elastische Theorie alternder Materialien

Die beschriebenen Theorien für abnehmende und zunehmende Steifigkeit, die bereits aus der Literatur bekannt sind, können nicht ohne weiteres kombiniert werden. In einem allgemeinen FE-Programm können Erhärtungs- und Schädigungsphänomene somit nur durch Fallunterscheidung behandelt werden, was aus algorithmischer Sicht nicht wünschenswert ist. Die Behandlung von Problemstellungen, bei denen beide Effekte gleichzeitig auftreten, ist mit den beschriebenen Gleichungen nicht möglich. Deshalb wird in diesem Abschnitt ein vereinheitlichter Ansatz abgeleitet, der die beiden beschriebenen Theorien als Sonderfälle enthält und darüberhinaus die Berechnung kombinierter Probleme ermöglicht. Ausgangspunkt ist die Definition eines Erhärtungsgrades β , sowie eines Schädigungsgrades δ , so daß gilt:

$$E(t) = \beta(t)[1 - \delta(t)]\bar{E} \quad (4.16)$$

$E(t)$ ist der Ursprungsmodul, der an unbelasteten Probekörpern gemessen wird, \bar{E} der theoretische E-Modul bei abgeschlossener Erhärtung ohne Schädigungseinfluß ($\beta = 1$, $\delta = 0$). Der monoton fortschreitende und stetig differenzierbare Erhärtungsgrad β läßt sich für erhärtenden Beton in Abhängigkeit des Hydratationsgrades α nach Gleichung (3.12) ermitteln:

$$\beta(t) = \frac{E(\alpha(t))}{\bar{E}} = \frac{\alpha(t) - \alpha_0}{1 - \alpha_0}^{2/3} \quad \text{für } \delta = 0 \quad \text{mit } \beta \in (0, 1] \quad \text{und } \dot{\beta} \geq 0 \quad (4.17)$$

Der ebenfalls monoton fortschreitende und stetig differenzierbare Schädigungsgrad δ beträgt Null für ungeschädigtes Material und geht gegen Eins für den Grenzfall der völligen Entfestigung:

$$\delta(t) \in [0, 1) \quad \text{und} \quad \dot{\delta} \geq 0 \quad (4.18)$$

Die eindimensionalen Nachgiebigkeiten ergeben sich rein mathematisch folgendermaßen:

$$D = \frac{1}{\beta(t)[1 - \delta(t)]\bar{E}} \quad \text{und} \quad \dot{D} = \frac{\beta\dot{\delta} - \dot{\beta}(1 - \delta)}{\beta^2(1 - \delta)^2\bar{E}} \quad (4.19)$$

Das Wesen der Erhärtungsprozesses besteht wie bereits geschildert darin, daß eine Steifigkeitsänderung nicht zu einer Dehnungsänderung führt. Dies bedeutet, daß in der konstitutiven Beziehung die Dehnungsänderung nicht von $\dot{\beta}$ abhängt. Demnach darf für die Ableitung der Werkstoffnachgiebigkeit nur das Differential nach dem Schädigungsgrad gebildet werden. Damit ergibt sich das gesuchte Stoffgesetz:

$$\dot{\epsilon}^e = \frac{\partial}{\partial t}(D(\dot{\beta}=0)\sigma) = D\dot{\sigma} + \frac{\partial D}{\partial \delta}\dot{\delta}\sigma = D\dot{\sigma} + \frac{\dot{\delta}}{1 - \delta}D\sigma \quad (4.20)$$

Dieses Eingreifen in die mathematische Formulierung des Materialmodells ist nicht willkürlich, sondern zur korrekten Beschreibung der physikalischen Realität von Erhärtungsvorgängen notwendig. Sie ist die konstitutive Folge der Tatsache, daß bei Erhärtungsphänomenen die Steifigkeit, die an einem unbelasteten Probekörper als Ursprungsmodul gemessen wird, die *tangentiale* Steifigkeit des Rechenmodells ist. Im Gegensatz dazu ist bei Aufweich- und Schädigungsvorgängen, die sich unabhängig vom Spannungs- oder Dehnungszustand einstellen, der Ursprungsmodul eines unbelasteten Probekörpers der *Sekantenmodul* im Werkstoffmodell. Zusammenfassend sind in Tabelle 4.1 die besprochenen Modelle gegenübergestellt. Abb. 4-6 zeigt an einem Beispiel die Auswirkung der verschiedenen Formulierungen.

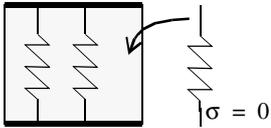
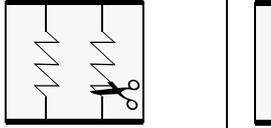
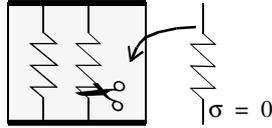
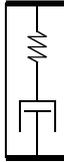
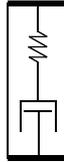
| | <i>Erhärtung</i> | <i>Schädigung</i> | <i>Erhärtung mit Schädigung</i> |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Modellvorstellung |  |  |  |
| Elastizitätsmodulentwicklung | $E(t) = \beta(t)\bar{E}$ | $E(t) = [1 - \delta(t)]\bar{E}$ | $E(t) = \beta(t)[1 - \delta(t)]\bar{E}$ |
| Rheologischer Modellkörper |  |  |  |
| Sofortige elastische Dehnung | $\epsilon^e(t_0) = \mathbf{D}(t_0)\sigma(t_0)$ | | |
| Elastische Dehnungsrate | $\dot{\epsilon}^e(t) = 0$ | $\dot{\epsilon}^e(t) = \dot{\mathbf{D}}(t)\sigma(t_0)$ | $\dot{\epsilon}^e(t) = \frac{\dot{\delta}}{1 - \delta}\mathbf{D}(t)\sigma(t_0)$ |
| Bezeichnungen | Inverse Werkstoffmatrix $\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t)^{-1}$ Erhärtungsgrad $\beta \in (0, 1]$, $\dot{\beta} \geq 0$ Schädigungsgrad $\delta \in [0, 1)$, $\dot{\delta} \geq 0$ | | |

Tabelle 4.1: Elastisches Verhalten bei zeitveränderlicher Steifigkeit infolge einer konstanten Belastung $\sigma(t_0)$.

4.3 Beschreibung des viskoelastischen Verhaltens

4.3.1 Phänomenologische Beschreibung

Bei Beton bewirkt die Viskosität des Zementsteins ein zeitabhängiges Verhalten des makroskopischen Gefüges. Da die mikrostrukturelle Beschreibung zur Zeit noch ein Gebiet der Grundlagenforschung der Materialwissenschaften darstellt, wird das viskoelastische Verhalten vereinfachend durch ein isotropes und homogenes Materialgesetz erfaßt. Die unter baupraktischen Gesichtspunkten sinnvolle Unterscheidung zwischen der zeitabhängigen Dehnungszunahme unter konstanter Spannung (*Kriechen*) und dem zeitabhängigen Spannungsabbau bei konstanter Dehnung (*Relaxation*) ist hier nicht erforderlich. Es handelt sich dabei um dasselbe Verhalten bei unterschiedlichen

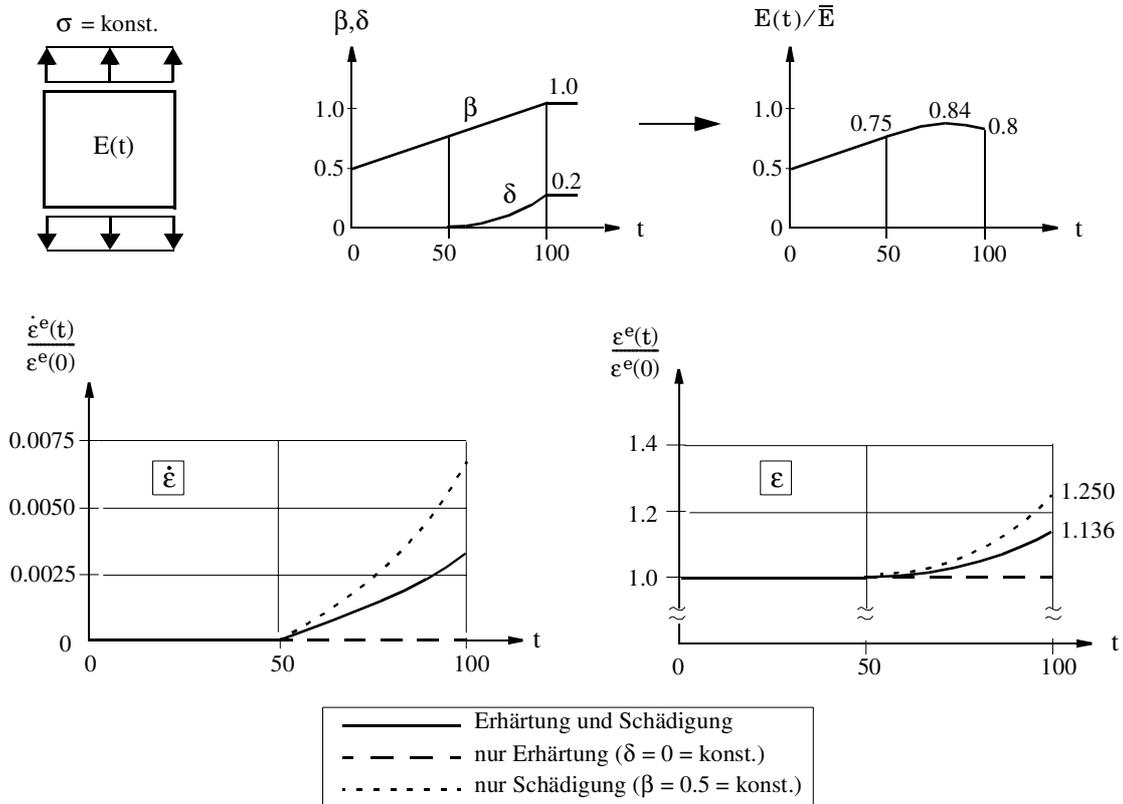


Abb. 4-6: Beispiel zum nichtlinear-elastischen Verhalten bei Erhärtung mit gleichzeitiger Schädigung.

Verformungsrandbedingungen. Da die Viskosität in erster Linie eine Verformungseigenschaft des Zementsteines ist, und sich dessen Volumenanteil während des Hydratationsprozesses stark verändert, spielt sie bei jungem Beton eine große Rolle. Experimentell verifizierte Konzepte liegen hauptsächlich als Kriechkurven oder Kriechfunktionen in Abhängigkeit des tatsächlichen Betonalters und des Belastungalters vor.

In Abb. 4-7a ist das Verformungsverhalten eines erhärteten Probekörpers dargestellt, wie es im Experiment beobachtet wird. Bei der Entlastung stellt man fest, daß neben dem elastischen Anteil auch ein „Rückkriechen“ stattfindet. Die Tatsache, daß dieses Rückkriechen mit den klassischen Lösungen nach Dischinger [55] nicht beschreibbar ist, hatte die Einführung eines Summationsansatzes zur Folge, der plastische und verzögert elastische Verformungsanteile getrennt beschreibt. Allgemeiner Kriechfunktionen, die im Gegensatz zu Dischingers Lösung nicht auf der Gültigkeit der sogenannten Whitneyschen Idealkurven beruhen, machen diese Unterscheidung überflüssig, solange die Gültigkeit des Superpositionsprinzipes für die Kriechdehnungen unterstellt werden kann [10, 178, 231]. Das tatsächliche Verhalten wird vollständig von einer vom Belastungsalter und vom tatsächlichen Alter abhängigen Kriechfunktion beschrieben, indem man sich vorstellt, daß die Entlastung der Superposition einer gleich großen jedoch entgegengerichteten zusätzlichen Spannung entspricht. In Abb. 4-7b ist das Kriechen eines erhärtenden Probekörpers zusammen mit den im vorherigen Abschnitt behandelten elastischen Dehnungen dargestellt. Mit fortschreitender Erhärtung wächst der Anteil der inelastischen, d.h. irreversibel elastischen Dehnungen. Unter Annahme des

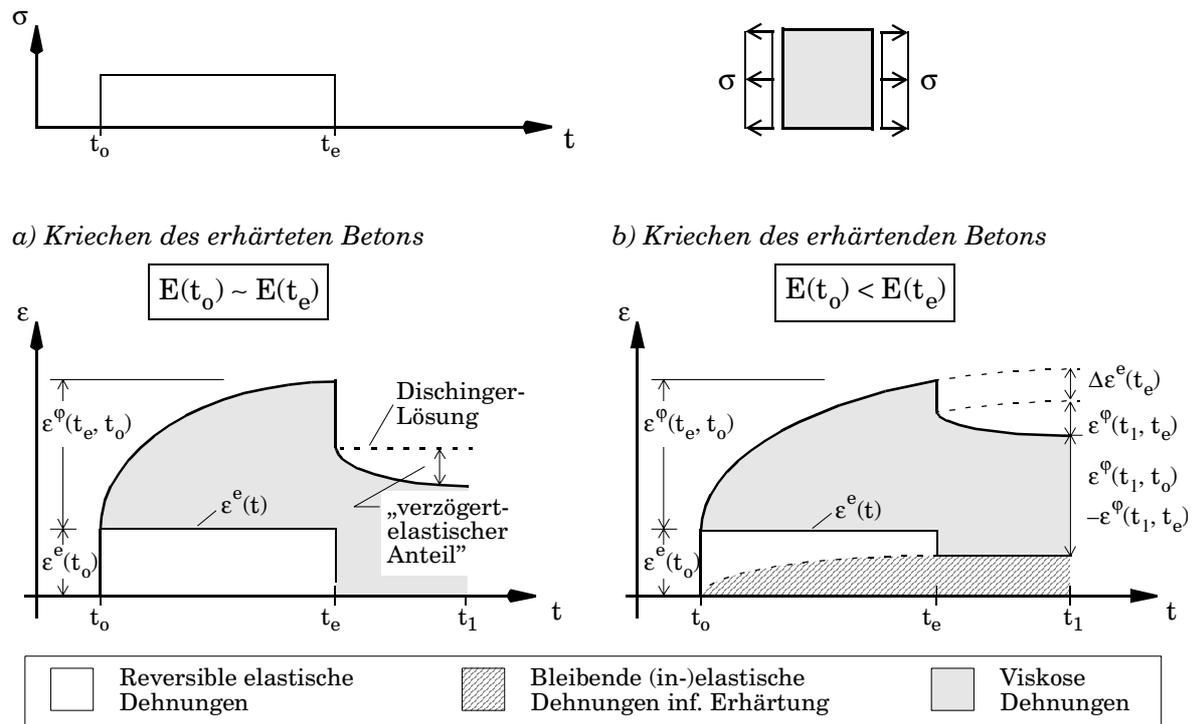


Abb. 4-7: Viskoelastisches Verhalten a) ohne, b) mit Berücksichtigung der Erhärtung.

Boltzmannsches Superpositionsprinzip ergibt sich die Kriechkurve durch Überlagerung des Be- und Entlastungsanteiles.

Vor allem bei Bauteilen aus hochfestem Beton mit sehr niedrigem W/Z-Wert haben Austrocknungsphänomene einen maßgeblichen Einfluß auf die zeitabhängigen Verformungen. Dies führt zur Unterscheidung von Grundkriechen und Trocknungskriechen [161]. Für die in dieser Arbeit betrachteten Bauteile aus normalfestem Beton wird unterstellt, daß das gesamte Kriechverhalten in Form einer Kriechfunktion definiert werden kann, welche unabhängig vom aktuellen Feuchtezustand ist. Die Berücksichtigung der Feuchte und damit austrocknungsbedingter Kriechdehnungen erfolgt im Mittel durch die empirisch gewonnene Kriechfunktion.

Nichtlineares Kriechen bleibt unberücksichtigt, da die Betonspannungen betragsmäßig klein gegenüber der Betondruckfestigkeit bleiben. Es wird deshalb im folgenden von linearem, d.h. zur kriecherzeugenden Spannung proportionalem viskosen Verhalten ausgegangen, was im betrachteten Bereich betragsmäßig geringer Spannungen eine zutreffende Annahme darstellt. Durch diese Annahme, die den meisten empirischen Beschreibungen zugrunde liegt, gilt das Boltzmannsche Superpositionsprinzip für die viskoelastischen Dehnungen.

Noch weitgehend offen ist die Frage, mit welcher Querdehnung das Kriechen behaftet ist. Von Neville et al. [147] werden Querdehnzahlen ν_φ zwischen 0 und 0.2 angegeben. Andere Autoren [224] gehen von einem isochoren, d.h. volumenkonstanten Kriechen aus. In dieser Arbeit wird die elastische Querdehnzahl auch für das viskose Verhalten übernommen, d.h. die Kriechdehnungen sind affin zu den kriecherzeugenden elastischen Dehnungen.

4.3.2 Viskoelastische Modelle für erhärteten Beton

4.3.2.1 Empirische Modelle

Aus dem beobachteten linearen Zusammenhang zwischen der aufgebrachten Spannung und den auftretenden Kriechverformungen resultiert die empirische Definition einer Kriechzahl φ als Faktor bezogen auf die elastischen kriecherzeugenden Dehnungen.

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varepsilon^\varphi(t, t_0)}{\varepsilon^e(t_0)} \quad (4.21)$$

Da sich die viskosen Dehnungen zeitabhängig einstellen und in ihrer Größe vom Zeitpunkt der Lastaufbringung abhängen, ist die Gesamtdehnung infolge einer Spannung σ_0 sowohl von dem tatsächlichen Alter t als auch von dem Alter zum Zeitpunkt der Belastung t_0 abhängig:

$$\varepsilon(t, t_0) = \underbrace{\frac{\sigma_0}{E(t_0)}}_{\varepsilon^e} + \varphi(t, t_0) \underbrace{\frac{\sigma_0}{E(t_0)}}_{\varepsilon^\varphi(t, t_0)} = \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E(t_0)} \sigma_0 = J(t, t_0) \sigma_0 \quad (4.22)$$

Für die Kriechfunktion $\varphi(t, t_0)$ bzw. die Nachgiebigkeitsfunktion $J(t, t_0)$ wurden in zahlreichen Arbeiten experimentell begründete, empirische Ansätze vorgeschlagen. Beschreibungen des Kriechverhaltens von jungem Beton finden sich in den Dissertationen von Breitenbücher [31], Gutsch [83], Laube [126], Mangold [135] und Schöppel [193] sowie eine Übersicht im RILEM-Report [63]. Die von Shen [201] beschriebenen Anforderungen an Kriechfunktionen, damit einerseits thermodynamische Gesetzmäßigkeiten nicht verletzt werden und andererseits die Superponierbarkeit gewährleistet bleibt, werden von Bažant et al. [15] teilweise widerlegt. Im folgenden wird von Kriechfunktionen ausgegangen, welche die Anwendung des Superpositionsgesetzes erlauben.

Verändert sich der Spannungszustand nicht nur zum Zeitpunkt t_0 , sondern im allgemeinen Fall kontinuierlich, so ergibt eine Spannungsänderung $d\sigma$ zum Zeitpunkt τ eine zeitunabhängige elastische Dehnungsänderung:

$$d\varepsilon^e = \frac{d\sigma(\tau)}{E(\tau)} \quad (4.23)$$

Außerdem tritt eine zeitveränderliche Dehnung zu einem späteren Zeitpunkt t ein:

$$d\varepsilon^\varphi(t, \tau) = \frac{\varphi(t, \tau)}{E(\tau)} d\sigma(\tau) \quad (4.24)$$

Die Gesamtdehnungen zum Zeitpunkt t erhält man durch Summation bzw. Integration aller Dehnungsanteile [8]. Dies führt auf eine Integralgleichung vom Volterraschen Typ:

$$\varepsilon(t) = \int_{\sigma(0)}^{\sigma(t)} J(t, \tau) d\sigma = \int_0^t J(t, \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (4.25)$$

$$\text{bzw. } \varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^\varphi(t) = \int_0^t \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{E(\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{\varphi(t, \tau) \dot{\sigma}(\tau)}{E(\tau)} d\tau \quad (4.26)$$

Faßt man die Integrale in Gleichung (4.25) und (4.26) als Stieltjes Integrale auf, so können mit dieser Formulierung auch Diskontinuitäten in der Spannungsgeschichte beschrieben werden [18]. Die Dehnungsrate ergibt sich durch Ableitung der Volterraschen Integralgleichung (4.25) nach [34]:

$$\dot{\varepsilon}(t) = J(t, t) \cdot \dot{\sigma}(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} [J(t, \tau) \cdot \dot{\sigma}(\tau)] d\tau = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t)} + \int_0^t \frac{\partial J(t, \tau)}{\partial t} \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (4.27)$$

Bei konventionellen statischen Berechnungen von Betonbauwerken bereitet die Zeitabhängigkeit des viskoelastischen Verzerrungsanteiles gewisse Probleme, da in der Regel nur stationäre Lastfälle gerechnet werden. Um eine instationäre Berechnung zu vermeiden, kommen bei der Verformungsberechnung quasi-stationäre Lastfälle mit einem verminderten E-Modul

$$E_{\text{eff}} = \frac{E(t_0)}{1 + \varphi(t_1, t_0)} \quad (4.28)$$

zur Anwendung. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß dieses Vorgehen nur solange korrekt ist, solange der Spannungszustand im Zeitraum t_0 bis t_1 näherungsweise konstant bleibt und die untersuchte Struktur ein relativ homogenes Kriechverhalten aufweist. Kommen jedoch unterschiedlich alte Bauabschnitte vor, so treten infolge des unterschiedlichen Kriechverhaltens Schnittkraftumlagerungen auf, die wiederum neue viskoelastische Verformungen hervorrufen. Dies ist auch zu beachten, wenn ohne instationäre Rechnung das Verformungsverhalten hydratisierender Bauteile abgeschätzt werden soll. Ein Ausweg besteht in einer manuellen Unterteilung des betrachteten Zeitraums in kleinere Zeitabschnitte. Überschlägig kann der Einfluß einer Spannungsrelaxation im betrachteten Zeitraum durch einen Relaxationsbeiwert berücksichtigt werden [229]

4.3.2.2 Kriechfunktionen in den Normen

In den neueren Betonbaunormen sind detaillierte Regelungen zur Berechnung von viskoelastischen Verformungen enthalten. Leider entsprechen die angegebenen Kriechfunktionen in der Regel nicht der Definition nach Gleichung (4.21), sondern sind auf den Elastizitätsmodul nach 28 Tagen bezogen [43, 52, 65]:

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{\sigma_0}{E(t_0)} + \varphi_{E28}(t, t_0) \frac{\sigma_0}{E_{28}} = J(t, t_0) \sigma_0 \quad (4.29)$$

Zur deutlichen Unterscheidung werden diese Kriechfunktionen hier mit φ_{E28} bezeichnet. Aus dem Vergleich mit Gleichung (4.22) erhält man folgenden Zusammenhang zwischen den Definitionen:

$$\varphi_{E28}(t, t_0) = \frac{E_{28}}{E(t_0)} \varphi(t, t_0) \quad (4.30)$$

In den normenseitig angegebenen Funktionen φ_{E28} ist demnach implizit eine standardisierte zeitliche Entwicklung der Steifigkeit enthalten, mit dem Nachteil, daß hierbei je nach Erhärtungsbedingungen zwangsläufig Fehler auftreten. Aus diesem praktischen Grund und wegen der physikalisch begründeten Formulierung wird in dieser Arbeit zunächst ausschließlich von Kriechfunktionen ausgegangen, welche entsprechend den Gleichungen (4.21) und (4.22) definiert sind (vgl. Abschnitt 4.3.6.4).

Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß das im vorhergehenden Abschnitt beschriebene vereinfachte Verfahren mit einem effektiven E-Modul nach Gleichung (4.28) in dieser Form nur mit Funktionen $\varphi(t, t_0)$ und nicht mit den genormten Funktionen $\varphi_{E28}(t, t_0)$ angewendet werden darf. Weicht die Steifigkeit zum Belastungszeitpunkt wesentlich vom 28-Tage E-Modul ab, so ist folgende Gleichung für den effektiven E-Modul zu verwenden:

$$E_{\text{eff}} = \frac{E(t_0)}{1 + \varphi(t_1, t_0)} = \frac{E(t_0)}{1 + \frac{E(t_0)}{E_{28}} \varphi_{E28}(t_1, t_0)} \quad (4.31)$$

Die in EC2 [65] angegebene Gleichung (dort Gl. (2.24)) ist demnach nur für erhärtete Betonbauwerke anwendbar und ist für jungen Beton durch Gleichung (4.31) zu ersetzen. Außer bei zwangbeanspruchten Bauwerken kann dieser Unterschied z.B. auch beim Aufbringen der Schwindvorspannung bei Spannbetontragwerken von maßgebendem Einfluß sein.

4.3.2.3 Rheologische Modelle

Nach Bažant [17] läßt sich jede Formulierung in Verzerrungsraten für den eindimensionalen Fall auch als rheologisches Modell deuten und veranschaulichen. Die gebräuchlichsten rheologischen Grundelemente Hookesche Feder und Newtonscher Dämpfer in Reihen- oder Parallelschaltung sind in Tabelle 4.2 zusammen mit ihrer mathematischen Beschreibung dargestellt. Das Fließelement (*St. Venant Körper*) wurde in die Tabelle nicht aufgenommen, da es nach Bažant [19] für eine Beschreibung des viskosen Verhaltens von jungem Beton nicht erforderlich ist. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit auf viskoplastische Modelle nicht eingegangen. Die dargestellten Grundelemente lassen sich wiederum in Reihen- und Parallelschaltungen kombinieren, so daß sich äußerst komplexe Modelle ergeben, mit denen sich annähernd beliebige Versuchsergebnisse nachrechnen lassen. Die notwendigen Feder- und Dämpferkonstanten werden durch einen Abgleich mit den Versuchskurven empirisch gefunden. Problematisch ist hierbei stets die Verallgemeinerung der gefundenen Modelle.

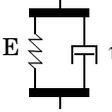
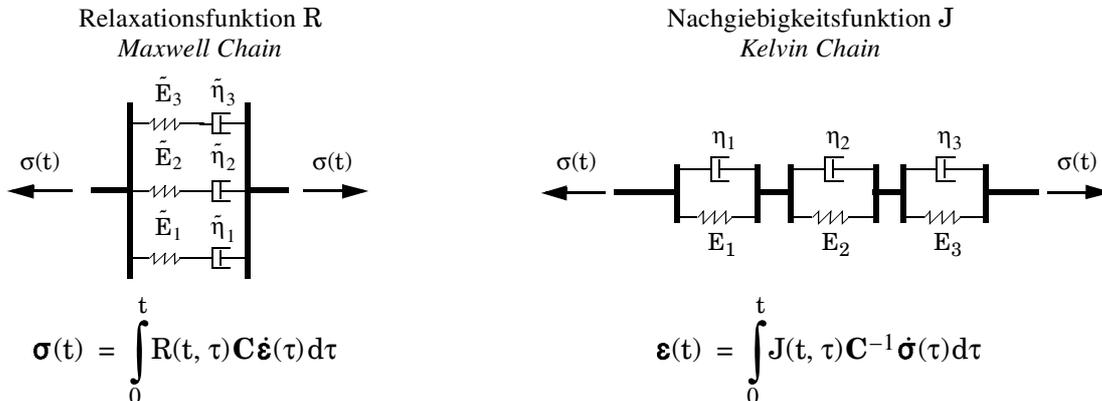
| Grundelement | Feder <i>Hooke</i> | Dämpfer <i>Newton</i> | Feder + Dämpfer <i>Maxwell</i> | Feder Dämpfer <i>Kelvin</i> |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Modell |  E |  η |  E η |  E η |
| Grundgleichung | $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E}$ | $\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta}$ | $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$ | $\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma - E\varepsilon}{\eta}$ |

Tabelle 4.2: Rheologische Grundelemente und ihre mathematische Beschreibung [97].

Zwei bewährte Modelle mit physikalischem Hintergrund, die man auch in kommerziellen Programmen findet [z.B. 241], sind in Abb. 4-8 dargestellt. Es handelt sich dabei um die Relaxationsfunktion $R(t, t_0)$, die durch Parallelschaltung von Maxwell-Elementen erzeugt wird (*Maxwell Chain*), und um die äquivalente Nachgiebigkeitsfunktion $J(t, t_0)$, die sich entsprechend aus einer Reihenschaltung von Kelvin-Elementen ergibt (*Kelvin Chain*).



Der Übergang vom eindimensionalen Modell auf das dreidimensionale Kontinuum erfolgt durch die dimensionslose Matrix \mathbf{C} [77]:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{(1+\nu)c} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

mit $c = 1 - 2\nu$

Der Übergang zu den rheologischen Modellen erfolgt durch Deutung jedes Kettengliedes als Element einer endlichen Reihe:

$$R(t, \tau) = \prod_{i=1}^n \tilde{E}_i(\tau) e^{-(t-\tau)\tilde{E}_i/\tilde{\eta}_i} \quad J(t, \tau) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\tilde{E}_i(\tau)} (1 - e^{-(t-\tau)\tilde{E}_i/\tilde{\eta}_i})$$

Abb. 4-8: Beispiel für viskoelastische Modelle mit eindimensionaler rheologischer Entsprechung [241].

4.3.2.4 Das BP-Modell

Von Bažant et al. stammen verschiedene Vorschläge für Nachgiebigkeitsfunktionen $J(t, t_0)$ mit einem thermodynamischen Hintergrund. Am weitesten verbreitet ist das *Double Power Law* (auch *BP-Modell*) [7, 8]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t, t_0) = \mathbf{J}(t, t_0) \cdot \boldsymbol{\sigma}(t_0)$$

$$\mathbf{J}(t, t_0) = \frac{1}{\tilde{E}(t_0)} (1 + \phi_0 (t - t_0)^n) \quad \text{mit} \quad \phi_0 = \phi_1 (t_0^{-m} + a) \quad (4.32)$$

Die Parameter a , m , n und ϕ_1 sind Materialparameter, die für den verwendeten Beton gemessen oder aus Erfahrungswerten abgeleitet werden müssen. Sowohl das *Double Power Law* als auch dessen Erweiterung, das *Triple Power Law*, sind nur bedingt geeignet, um das viskoelastische Verhalten von jungem Beton zu beschreiben. Emborg [62, 63] schlägt deshalb Erweiterungen des Modells vor, was dazu führt, daß letztendlich ein relativ komplexes Gesetz mit entsprechend vielen, aus Versuchen zu bestimmenden Materialparametern entsteht.

Ein genereller Nachteil bei der numerischen Umsetzung von Kriechfunktionen besteht in der Notwendigkeit, die gesamte Spannungsgeschichte jedes Integrationspunktes abspeichern zu müssen, um durch Superposition der einzelnen Kriechanteile die viskosen Verzerrungsraten zu erhalten (vgl. Gleichung (4.27)). Dies führt zu einem speicher- und rechenzeitintensiven Algorithmus, der insbesondere in früheren Jahren einen zu hohen Anspruch an die verfügbaren Kapazitäten stellte. Durch die Entwicklung des Terms $(t - t_0)^n$ in eine Reihe kann dies umgangen werden.

4.3.3 Erhärtungsspezifische Modelle für Beton

4.3.3.1 Das Modell nach Laube

Laube [126] entwickelte in seiner Dissertation eine Kriechfunktion für jungen Beton, die von ihm und anderen Autoren [83, 85] experimentell verifiziert und ergänzt wurde. Auch Onken/Rostásy [155] und Huckfeldt [97] verwenden diesen Ansatz, der das Kriechen mit folgender Funktion beschreibt:

$$\varphi(t, t_0) = a \frac{t - t_0}{t_k}^b \quad (4.33)$$

Dabei ist t_k eine zeitliche Bezugsgröße, die mit 1 Stunde angegeben wird, wobei sie als Zahlenwert in der Einheit der Belastungsdauer $(t - t_0)$ einzusetzen ist. Der Einfluß des Betonalters t_0 bzw. des Hydratationsgrades $\alpha(t_0)$ zum Belastungszeitpunkt wird durch eine entsprechende Definition der Größen a und b berücksichtigt. Bei Verwendung des Hydratationsgrades als Bezugsgröße genügen lineare Ansätze [126]:

$$a = a_1 + a_2 \cdot \alpha(t_0) \quad (4.34)$$

$$b = b_1 + b_2 \cdot \alpha(t_0) \quad (4.35)$$

Damit müssen 4 Modellparameter a_1 , a_2 , b_1 und b_2 experimentell bestimmt werden [83, 126, 155].

4.3.3.2 Erhärtungstheorie (Solidification Theory)

Bážant stellt in [17] die Nachteile der Kriechfunktionen bei hydratisierendem Beton dar. Die thermodynamischen Grundlagen, auf denen das BP-Modell basiert, haben theoretisch nur bei konstanten Materialeigenschaften Gültigkeit. Deshalb wird in [17] eine neue, sehr anschauliche Betrachtungsweise für das viskoelastische Verhalten von Beton vorgeschlagen, in der die Erhärtung als natürlicher Parameter des Modells eingeführt wird (*Solidification Theory*) [19, 37, 38]. Man trennt dabei gedanklich den nach wie vor als homogen und isotrop betrachteten Beton in zwei Phasen, eine erhärtete und eine quasi plastische Phase (Abb. 4-9).

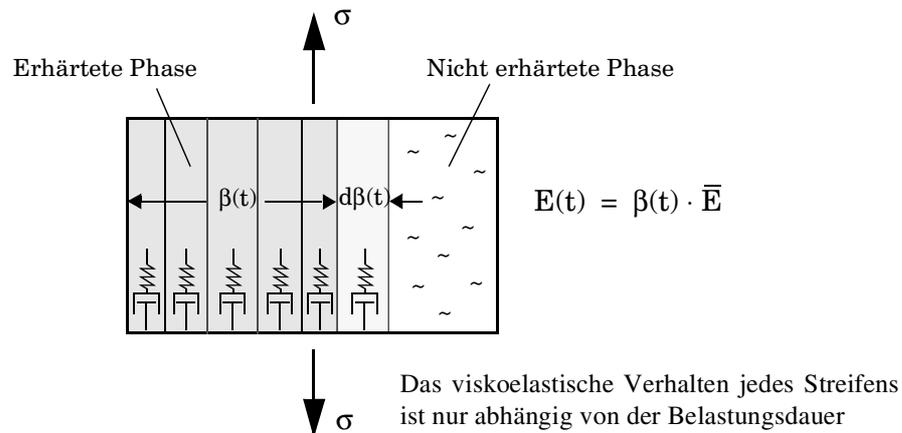


Abb. 4-9: Modellvorstellung für die Viskoelastizität erhärtenden Betons [17].

Der zeitliche Verlauf der Erhärtung wird analog zum Federmodell nach Marx (siehe Abschnitt 4.2.6) als Erhärtung einzelner Volumenanteile aufgefaßt. Die Erweiterung besteht darin, nun auch das viskoelastische Verhalten jedem einzelnen Streifen zuzuordnen mit dem entscheidenden Vorteil, daß für jeden Streifen eine sehr einfache und vor allem nur noch von einem Zeitparameter, nämlich der Lastdauer, abhängige Kriech- bzw. Relaxationsfunktion gewählt werden kann. Wenn z.B. ein rheologisches Modell zur Beschreibung gewählt wird, sind die einzelnen Feder- und Dämpferkonstanten jedes Streifens nicht mehr zeitabhängig. Analog ist auch die Steifigkeit jedes einzelnen Streifens nicht mehr zeitabhängig. Die experimentell bestimmte Steifigkeitsänderung wird als Maß für das gedachte Phasenwachstum herangezogen (Abb. 4-9). Bažant und Prasannan [17] haben durch Nachrechnung verschiedener Versuche festgestellt, daß das beschriebene Modell besser in der Lage ist, das Kriechverhalten zu beschreiben, als integrale Kriechfunktionen wie z.B. das *Double* oder *Triple Power Law*. Auch Lockhorst und van Breugel [133] verwenden ein ähnliches Modell und erhalten Rechenergebnisse, die sehr gut mit Versuchsergebnissen übereinstimmen.

Neuere Veröffentlichungen von Bažant et al. [19, 37] zeigen die Äquivalenz der *Solidification Theory* zu den rheologischen Modellen *Maxwell Chain* und *Kelvin Chain* (Abb. 4-8). Die mathematischen Formulierungen dieser zwei unterschiedlichen Modellvorstellungen lassen sich ineinander überführen. Es wurde somit gezeigt, daß diese rheologischen Modelle das Verhalten von hydratisierendem Beton nicht nur empirisch, sondern auch physikalisch begründet wiedergeben. Komplizierter aufgebaute rheologische Modelle sind demnach nicht notwendig.

4.3.3.3 Anwendung von Nachgiebigkeitsfunktionen auf erhärtenden Beton

Die Formulierung der viskoelastischen Dehnungen über eine Nachgiebigkeitsfunktion $J(t, t_0)$ nach Gleichung (4.25) wurde von vielen Forschern auf erhärteten Beton angewandt. Die Anwendung auf jungen Beton wurde erst in letzter Zeit durch die Verfügbarkeit von geeigneten Nachgiebigkeitsfunktionen, z.B. derjenigen nach Laube [126], ermöglicht. De Borst und van den Boogard [25] beschreiben eine Methode, um ausgehend von einer Nachgiebigkeitsfunktion eine inkrementelle konstitutive Beziehung für erhärtenden Beton zu erhalten. In Anhang C.1 wird diese Methode mit den in der vorliegenden Arbeit entwickelten Formulierungen in Zusammenhang gebracht.

4.3.3.4 Ansatz von Huckfeldt

Huckfeldt [97] formuliert eine konstitutive Beziehung für die viskosen Dehnungsraten bei veränderlicher Steifigkeit:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\varphi} = \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(t, t_0) \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma}] \quad (4.36)$$

Diese Darstellung gilt für viskose Dehnungen, die sich affin zu den elastischen Dehnungen einstellen. In [97] wird auch eine analoge Gleichung für volumenkonstantes viskoses Verhalten angegeben, auf die hier nicht näher eingegangen wird. Huckfeldt erkennt, daß Gleichung (4.36) auf drei Kriechanteile führt (vgl. Gleichung (4.38)) und kommt aufgrund seiner Rechenergebnisse zu dem Schluß, daß nur der erste Anteil anzusetzen ist. Im Abschnitt 4.3.5.2 werden die einzelnen Kriechanteile einer anschaulichen physikalischen Deutung unterzogen. Dies führt letztlich zu einer vereinheitlichten viskoelastischen Theorie für Erhärtungs- und Aufweichungsphänomene.

4.3.4 Viskoelastische Modelle für Schädigung

Kriechmodelle bei Schädigung sind in der Literatur für Metalle und Kunststoffe veröffentlicht [127]. Da diese Stoffe keinen Erhärtungseffekt aufweisen, kann die Kriechfunktion in der Regel allein in Abhängigkeit des Belastungsalters $(t-t_0)$ beschrieben werden, was zu einer wesentlich einfacheren Formulierung führt. Außerdem wird das Verhalten von Metallen und Kunststoffen oft auch mit der Viskoplastizitätstheorie beschrieben, welche für Beton nach Bažant [19] nicht zweckmäßig ist. Bei Beton könnten theoretisch Unterschiede im Kriechverhalten zwischen Erhärtung und Schädigung auftreten, wobei jedoch in der Literatur keine derartigen Hinweise oder spezielle Kriechfunktionen für den Schädigungsfall gefunden wurden.

4.3.5 Viskoelastisches Stoffgesetz bei Erhärtung oder Schädigung

4.3.5.1 Allgemeines

In Abschnitt 4.2.5 wurde dargelegt, wie sich die konstitutiven Gleichungen für die elastischen Dehnungsraten bei Aufweichungs- und Erhärtungsphänomenen unterscheiden. In diesem Abschnitt werden nun zwei getrennte, auf viskoelastische Verzerrungsanteile erweiterte Modelle für Erhärtung und Schädigung abgeleitet. Dieser Abschnitt bildet die Grundlage für das verallgemeinerte Stoffgesetz, welches in Abschnitt 4.3.7 vorgestellt wird.

Als Ausgangspunkt dient die experimentell gewonnene, eindimensionale Darstellung der viskosen Dehnungen durch eine Kriechfunktion $\varphi(t, t_0)$, welche den Dehnungsverlauf für eine zum Zeitpunkt t_0 aufgebrachte Einheitsspannung σ_0 beschreibt. Die Kriechfunktion wird aus Versuchen gewonnen, bei denen der Spannungszustand konstant gehalten wird. Hat man es mit zeitveränderlichen Steifigkeiten und Spannungen zu tun, so ist eine Formulierung in Verzerrungsraten zweckmäßig.

4.3.5.2 Ableitung der konstitutiven Beziehungen für die viskosen Dehnungsraten

Mit der dimensionslosen Matrix \mathbf{C} (vgl. Abb. 4-8), die problemangepaßt den Übergang auf mehrdimensionale Spannungszustände beinhaltet, erhält man die elastische inverse Werkstoffmatrix \mathbf{D} :

$$\mathbf{D}(t) = (\mathbf{E}(t)\mathbf{C})^{-1} \quad (4.37)$$

Damit ergibt sich nach Huckfeldt [97] die viskose Dehnungsrate durch Ableitung nach der Zeit (Gl. 4.36):

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\varphi = \frac{\partial}{\partial t}[\varphi\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}] = \underbrace{\dot{\varphi}\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^\varphi} + \underbrace{\varphi\dot{\mathbf{D}}\boldsymbol{\sigma}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^\varphi} + \underbrace{\varphi\mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\sigma}}}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^\varphi} \quad (4.38)$$

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen aus [97] soll hier von einem ersten, zweiten und dritten Anteil der viskosen Dehnungsrate gesprochen werden. Diese Anteile ergeben sich aus der mathematischen Ableitung und sind auf ihre physikalische Bedeutung hin zu untersuchen.

Der erste Anteil $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^\varphi$ ist der maßgebliche, primäre Anteil des Kriechens. Sind Steifigkeit und Spannung nicht zeitveränderlich, stellt er den einzigen Anteil dar. Durch Integration über die Zeit erhält man den Standardterm der viskoelastischen Dehnungen, nämlich die zugrunde liegende Kriechfunktion (Abb. 4-10). Durch die Nachrechnungen von Kriechkurven kann demnach auch nur dieser Anteil verifiziert werden. Für Erhärtungs- und Schädigungsphänomene lautet $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^\varphi$ für eine konstante Spannung $\sigma_0(t_0)$:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^\varphi(t, t_0) = \dot{\varphi}(t, t_0)\mathbf{D}(t_0)\boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4.39)$$

Für den allgemeinen Fall, daß nicht nur zum Zeitpunkt t_0 , sondern kontinuierlich Spannungsänderungen stattfinden, erhält man die entsprechenden Terme durch Integration über die Belastungszeitpunkte τ :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^\varphi(t) = \int_0^t \dot{\varphi}(t, \tau)\mathbf{D}(\tau)\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (4.40)$$

Zur Erläuterung des zweiten Anteils $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^\varphi$ soll wieder das Gedankenmodell aus Abschnitt 4.2 dienen: An einem konstant belasteten Probekörper sei das Kriechen abgeschlossen ($\dot{\varphi}(t, t_0) = 0$). Die Steifigkeit soll sich trotzdem noch ändern, wobei diese Änderung nicht unbedingt hydrationsbedingt sein muß. Die Frage ist, ob sich an dem Probekörper aufgrund der Steifigkeitsänderung Dehnungsänderungen ergeben. Wie bereits in Abschnitt 4.2 ausgeführt wurde, ist zwischen Erhärtung und Aufweichungsphänomenen zu unterscheiden, da sich ein realer Probekörper unterschiedlich verhält. Im Prinzip können die früher gemachten Überlegungen nun auf das viskoelastische Verhalten übertragen werden:

Bei Erhärtungsphänomenen stellen sich entsprechend dem Gedankenmodell der spannungslos neu entstehenden Verbindungen keinerlei Dehnungen ein. Das bedeutet, daß der zweite Anteil der viskosen Dehnungsrate bei Erhärtungsphänomenen wie der Hydratation von Beton physikalisch nicht richtig ist.

$$\text{Erhärtung:} \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(t_0) = 0 \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^\varphi = 0 \quad (4.41)$$

Bei Schädigungsphänomenen stellen sich neue elastische Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}_2^e$ ein, die durch eine Schädigung zum Zeitpunkt \tilde{t} hervorgerufen werden. Man würde beobachten, daß diese neuen elastischen Dehnungen auch wieder viskose Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}_2^\varphi$ nach sich ziehen.

$$\text{Schädigung: } \boldsymbol{\varepsilon}_2^\varphi(t) = \int_{t_0}^t \varphi(t, \tilde{t}) \boldsymbol{\varepsilon}_2^e(\tilde{t}) d\tilde{t} = \boldsymbol{\sigma}_o(t_0) \int_{t_0}^t \varphi(t, \tilde{t}) \dot{\mathbf{D}}(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (4.42)$$

Die Dehnungsrate erhält man gemäß den Regeln für die Ableitung einer Volterraschen Integralgleichung [34] bei konstanter Spannung $\boldsymbol{\sigma}_o(t_0)$:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^\varphi(t) = \boldsymbol{\sigma}_o(t_0) \varphi(t, t) \dot{\mathbf{D}}(t) + \boldsymbol{\sigma}_o(t_0) \int_{t_0}^t \dot{\varphi}(t, \tilde{t}) \dot{\mathbf{D}}(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (4.43)$$

Sind die Spannungen nicht konstant sondern zeitveränderlich, dann muß über alle Belastungszeitpunkte τ integriert werden:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^\varphi(t) = & \int_0^t \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) \varphi(t, t) \dot{\mathbf{D}}(t) d\tau + \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(\tau) \int_\tau^t \dot{\varphi}(t, \tilde{t}) \dot{\mathbf{D}}(\tilde{t}) d\tilde{t} d\tau \\ & \boldsymbol{\sigma}(t) \varphi(t, t) \dot{\mathbf{D}}(t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Der dritte Anteil $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^\varphi$ läßt sich als das sofortige Kriechen der Spannungsänderung deuten. Ist die Spannung konstant, verschwindet dieser Anteil. Ist die Spannung veränderlich, ergibt sich zusammen mit dem elastischen Dehnungsanteil eine Verzerrungsrate von

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^\varphi = (1 + \varphi) \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.45)$$

Hierbei repräsentiert φ das sofortige Kriechen $\varphi(t, t)$, das bei Beton im allgemeinen nicht auftritt. Allerdings wächst φ sehr schnell an (vgl. Abb. 4-7), so daß dieser Anteil beim Übergang zu einer inkrementellen Formulierung zu berücksichtigen ist, da er je nach Größe der Zeitschritte nicht vernachlässigt werden kann (vgl. Anhang C):

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_3^\varphi = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t_{i+1}, \tau) \mathbf{D}(\tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (4.46)$$

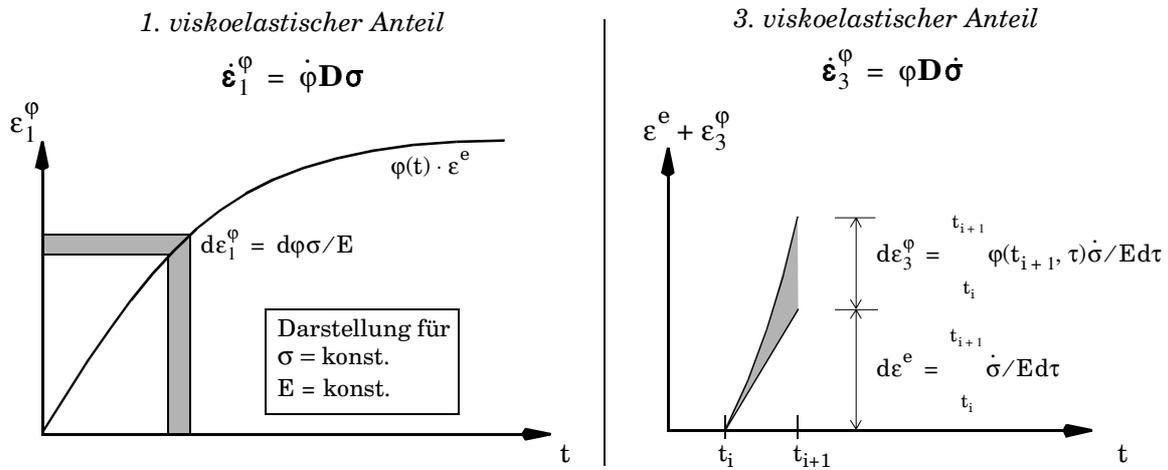


Abb. 4-10: Anschauliche Deutung des ersten und dritten viskoelastischen Dehnungsanteils.

Vergleicht man die Definitionen der rheologischen Modelle in Tabelle 4.2 mit dem Aufbau von Gleichung (4.38), so lässt sich der Zusammenhang im Eindimensionalen auch als Feder-Dämpfer-Modell deuten (Abb. 4-11).

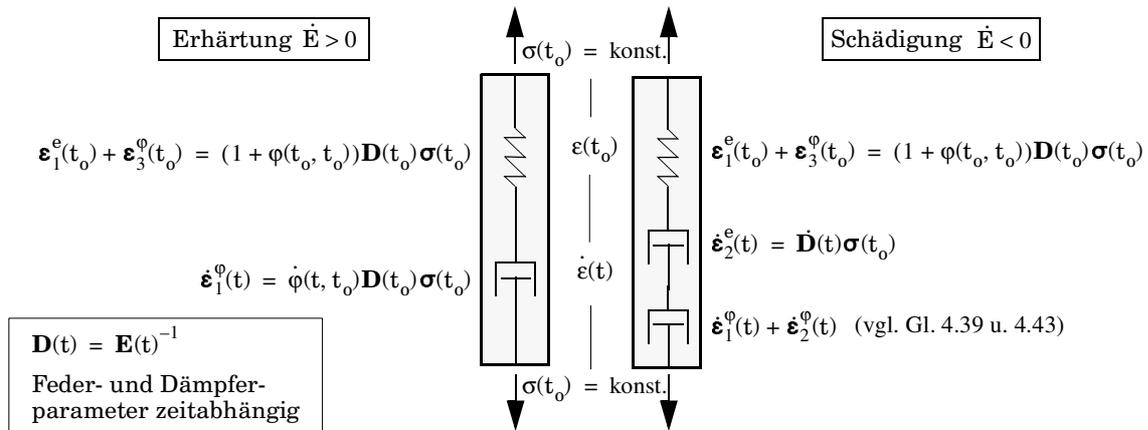


Abb. 4-11: Eindimensionale rheologische Modelle für Erhärtung und Schädigung.

Faßt man alle elastischen und viskosen Terme zusammen, so erhält man die vollständigen viskoelastischen konstitutiven Beziehungen für nichtlinear-elastisch erhärtende und aufweichende Materialien, die jeweils den Fall der konstanten Steifigkeit als Sonderfall beinhalten:

Schädigungs-, Schmelz- und Aufweichvorgänge: $\dot{E}(t) \leq 0$

$$\begin{aligned}
 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\varphi(t) &= \mathbf{D}(t)\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^e \\
 &+ \dot{\mathbf{D}}(t)\boldsymbol{\sigma}(t) && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^e \\
 &+ \int_0^t \dot{\varphi}(t, \tau)\mathbf{D}(\tau)\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^\varphi \\
 &+ \boldsymbol{\sigma}(t)\varphi(t, t)\dot{\mathbf{D}}(t) && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{2a}^\varphi \\
 &+ \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(\tau) \int_\tau^t \dot{\varphi}(t, \tilde{t})\dot{\mathbf{D}}(\tilde{t}) d\tilde{t} d\tau && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{2b}^\varphi \\
 &+ \mathbf{D}(t)\varphi(t, t)\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^\varphi
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

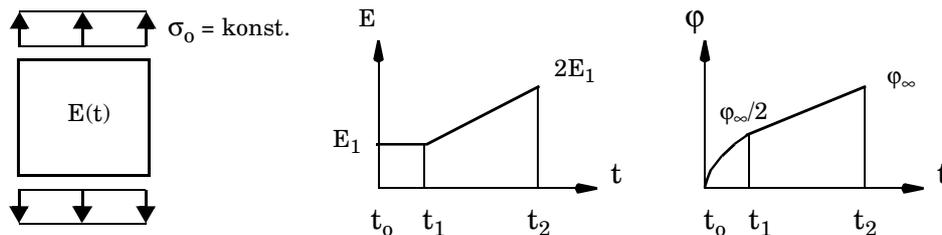
Erstarrungs- und Erhärtungsvorgänge: $\dot{E} \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\varphi(t) &= \mathbf{D}(t)\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^e \\
 &+ \int_0^t \dot{\varphi}(t, \tau)\mathbf{D}(\tau)\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^\varphi \\
 &+ \mathbf{D}(t)\varphi(t, t)\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^\varphi
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

In Anhang C.1 werden die entsprechenden inkrementellen Beziehungen angegeben, wobei gleichzeitig gezeigt wird, daß die konsequente Ableitung aus einer Nachgiebigkeitsfunktion $J(t, t_0)$ zum selben Ergebnis führt.

4.3.5.3 Verifikation anhand eines einfachen Beispiels

Zum Abschluß soll das Gesagte durch ein einfaches Beispiel verdeutlicht werden. Es wird ein eindimensionaler Spannungszustand in einem Betonkörper betrachtet, der durch eine Spannung σ_0 belastet wird. Während der Zeit t_0 bis t_1 kriecht der Beton bis zur Hälfte seiner Endkriechzahl.



Von der Zeit t_1 bis zur Zeit t_2 soll der Körper kriechen, gleichzeitig jedoch auch auf das Doppelte seiner Steifigkeit er härten. Beides erfolge zur Vereinfachung linear mit der Zeit:

$$\dot{\varphi} = \frac{\varphi_{\infty}/2}{t_2 - t_1} \quad \text{und} \quad \dot{E} = \frac{E_1}{t_2 - t_1} \quad \text{für } t \in [t_1, t_2]$$

Die Ableitung der Nachgiebigkeit D im eindimensionalen Fall erhält man aus der Quotientenregel:

$$\dot{D} = \frac{d}{dt} \frac{1}{E} = -\frac{\dot{E}}{E^2} = \frac{-(t_2 - t_1)}{E_1(t_2 + t - 2t_1)^2} < 0$$

Da in diesem Beispiel der Spannungszustand konstant bleibt, können die Gleichungen (4.47) bzw. (4.48) ohne Integration der Spannungsgeschichte verwendet werden (vgl. Abb. 4-11). Geht man fälschlicherweise von Gleichung (4.47) aus, so ergibt sich z.B. eine negative elastische Dehnungsrate:

$$\dot{\varepsilon}^e = \dot{\sigma}D + \sigma\dot{D} < 0 \quad \text{⚡}$$

= 0

Dies widerspricht offensichtlich der Anschauung, denn der Körper wird sich nicht elastisch verkürzen. Geht man richtigerweise von Gleichung (4.48) aus, so erhält man die viskose Dehnungsrate, bei der im verwendeten Beispiel nur der erste Anteil einen Beitrag liefert, da die Spannung konstant ist und der dritte Anteil wegen $\varphi(t, t) = 0$ und außerdem $\dot{\sigma} = 0$ entfällt:

$$\dot{\varepsilon}^e = \dot{\sigma}/E = 0 \tag{4.49}$$

$$\dot{\varepsilon}^{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}\sigma}{E} + \frac{\varphi\dot{\sigma}}{E} = \frac{\varphi_{\infty}\sigma_0}{2E_1(t_2 - t_1)} > 0$$

= 0

Integriert man diesen Term von t_1 bis t_2 , so erhält man den viskosen Dehnungszuwachs zum Zeitpunkt t_2 :

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\varepsilon}^{\varphi} dt = \frac{\varphi_{\infty}\sigma_0}{2E_1}$$

Diesen Wert hätte man auch sofort aus der gegebenen Kriechkurve ablesen können. Man erkennt, daß für Erhärtungsphänomene die Einschränkung auf lineare Erhärtungs- und Kriechverläufe nicht erforderlich gewesen wäre, um zum selben Ergebnis zu gelangen. Der Erhärtungsverlauf nach der Lastaufbringung geht konsequenterweise nicht in die Berechnung der Kriechdehnungen ein.

4.3.6 Diskussion des viskoelastischen Ansatzes

4.3.6.1 Grundgedanken des vorliegenden Modells

Es wurde gezeigt, daß das unterschiedliche physikalische Verhalten bei Schädigungs- und Erhärtungsvorgängen eine theoretische Entsprechung in der jeweils anzusetzenden Werkstoffsteifigkeit besitzt. Bei Erhärtungsvorgängen entspricht der natürlich zu messende momentane E-Modul der tangentialen Steifigkeit im Last-Verschiebungs-Diagramm. Wird mit der tangentialen Steifigkeit oder Nachgiebigkeit operiert, so ist eine Formulierung nach Gleichung (4.48) richtig.

Bei Aufweichungs- oder Schädigungsvorgängen ist die Steifigkeit eines unbelasteten Probekörpers gleich dem Sekantenmodul im Last-Verschiebungs-Diagramm. Entsprechend muß eine konstitutive Beziehung verwendet werden, die von der totalen Formulierung (4.13) ausgeht, was mit der Definition der Kriechfunktion (4.21) unter Einbeziehung der Veränderlichkeit aller Größen auf Gleichung (4.47) führt.

Die bisher dargestellten Gleichungen ermöglichen allerdings noch keine Berechnung kombinierter Erhärtungs- und Schädigungsprobleme.

4.3.6.2 Vergleich mit der Differentialgleichung von Dischinger

Dischinger stellt in seinem wegweisenden Aufsatz [55] eine DGL für die viskoelastische Verzerungsrate vor [91]:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E(t)} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{\sigma}{E} \quad (4.50)$$

Man erkennt unschwer die Ähnlichkeit mit Gleichung (4.48). Der fehlende Term $\dot{\varepsilon}_3^\varphi$ spielt in Dischingers Differentialgleichung keine Rolle, da $\varphi(t,t)$ in der differentiellen Betrachtungsweise verschwindet. Wie bereits erwähnt ist dieser Term jedoch für eine konsistente Umsetzung in einen inkrementellen Algorithmus erforderlich.

Der Wegfall der Integration des ersten viskosen Anteils über die Lastgeschichte entspringt der von Dischinger unterstellten Gültigkeit der sogenannten Whitneyschen Idealkurven (*rate of creep method*). Da dieses Modell nach dem heutigen Wissensstand Beton nicht genau genug beschreibt, muß in der vorgestellten allgemeineren Darstellung über die Belastungszeitpunkte integriert werden.

4.3.6.3 Vergleich mit der Solidification Theory

Die *Solidification Theory* von Bažant (Abschnitt 4.3.3.2) stellt mehr ein Gedankenmodell als einen rechnerischen Ansatz dar. Für die numerische Umsetzung des viskoelastischen Verhaltens jedes ‚Streifens‘ sind konstitutive Beziehungen notwendig. Da die Erhärtung immanant im Modell erfaßt wird, indem der Prozentsatz der festen Phase variiert, ist in jedem Streifen die Steifigkeit konstant (vgl. Abb. 4-9). Außerdem kann für die Kriechfunktion jedes Streifens ein sehr einfacher, nur von der Belastungsdauer ($t-t_0$) abhängiger Ansatz gewählt werden.

Zwar ist die *Solidification Theory* ein anschauliches Abbild des tatsächlichen physikalischen Verhaltens, jedoch müssen die Eigenschaften des Körpers wieder an makroskopischen Versuchsergebnissen geeicht werden, so daß sich in der Umsetzung kein wesentlicher Vorteil gegenüber einer Formulierung ergibt, die sich am makroskopischen Verhalten orientiert.

4.3.6.4 Zur Anwendung von Nachgiebigkeits- und Kriechfunktionen

De Borst und van den Boogard [25] haben aus der Definition der Nachgiebigkeitsfunktion eine inkrementelle Beziehung für den Einsatz in einem FE-Programm abgeleitet. Dieser Ansatz läßt sich für den Fall des erhärtenden Betons in den vorgestellten allgemeinen Ansatz überführen (siehe Anhang C.1). Bei der Anwendung von Kriechfunktionen auf erhärtenden Beton ist darauf zu achten, ob eine entsprechende Definition wie in dieser Arbeit verwendet wird (vgl. Abschnitt 4.3.2.2). Mit dem hier beschriebenen Stoffgesetz sind nur Kriechfunktionen nach Gleichung (4.21) verträglich. Für jungen Beton eignet sich wie schon erwähnt insbesondere der Ansatz von Laube [126].

Auch eine Verwendung der genormten Funktionen $\varphi_{E28}(t, t_0)$, die auf den 28-Tage E-Modul bezogen sind, ist möglich. Bei der Ableitung der viskosen Dehnungsrate läßt sich jedoch der zweite Dehnungsanteil, der Erhärten und Aufweichen unterscheidet, nicht mehr isolieren:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\varphi = \frac{\partial}{\partial t} [\varphi_{E28} \mathbf{D}_{28} \boldsymbol{\sigma}] = \dot{\varphi}_{E28} \mathbf{D}_{28} \boldsymbol{\sigma} + \varphi_{E28} \mathbf{D}_{28} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.51)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^\varphi + \boldsymbol{\varepsilon}_2^\varphi \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3^\varphi$$

Bei Erhärtungsphänomenen ist $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^\varphi = 0$ wegen $\frac{\partial}{\partial t} E(t_0) = 0$. Somit erhält man unter Berücksichtigung der Spannungsgeschichte für Erhärtungsphänomene mit Gleichung (4.30):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\varphi(t) &= \mathbf{D}(t) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^e \\ &+ \mathbf{D}_{28} \int_0^t \dot{\varphi}_{E28}(t, \tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^\varphi \\ &+ \mathbf{D}_{28} \varphi_{E28}(t, t) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^\varphi \end{aligned} \quad (4.52)$$

In Abschnitt 4.3.2.2 wurde gezeigt, daß in der Funktion $\varphi_{E28}(t, t_0)$ implizit ein Ansatz für die Entwicklung der Betonsteifigkeit enthalten ist. Daher ist der erste Kriechanteil nicht mehr von der tatsächlichen Steifigkeitsentwicklung abhängig.

4.3.7 Vereinheitlichtes viskoelastisches Stoffgesetz für alternde Materialien

4.3.7.1 Herleitung

Die bisher vorgestellten viskoelastischen Modelle sind geeignet, reine Erhärtungs- bzw. Schädigungsvorgänge zu beschreiben. Wie für die elastischen ist auch für die viskosen Verzerrungsanteile eine Kombination beider Modelle nur möglich, wenn abschnittsweise entweder reine Erhärtung oder reine Schädigung vorliegt. Für den allgemeinen Fall des kombinierten Erhärtungs-Schädigungs-Problems ist deshalb eine verallgemeinerte Theorie erforderlich, welche in diesem Abschnitt abgeleitet wird. Ausgangspunkt ist wiederum die Definition des zeitabhängigen Elastizitätsmoduls in Abhängigkeit des Erhärtungsgrades β und des Schädigungsgrades δ (vgl. Gleichung (4.16)):

$$E(t) = \beta(t)[1 - \delta(t)]\bar{E} \quad \text{mit} \quad \beta \in (0, 1] \quad , \quad \dot{\beta} \geq 0 \quad , \quad \delta(t) \in [0, 1) \quad \text{und} \quad \dot{\delta} \geq 0$$

Ausgangspunkt für die viskosen Dehnungen ist die Definition der Kriechfunktion $\varphi(t, t_0)$, die für Erhärtungs- und Schädigungsphänomene und demnach auch für eine Kombination Gültigkeit haben soll (vgl. Abschnitte 4.3.2 und 4.3.4). Es wird also ein einheitliches Kriechverhalten für Erhärtung und Schädigung unterstellt:

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^\varphi(t)}{\boldsymbol{\varepsilon}^e(t_0)} \quad (4.53)$$

Aus dieser Definition und den bereits in Abschnitt 4.2.7 hergeleiteten verallgemeinerten elastischen Dehnungen ergeben sich die Kriechdehnungen infolge einer einmaligen Spannungsänderung $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^\varphi(t) &= \varphi(t, t_0) \boldsymbol{\varepsilon}_1^e(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(t, \tilde{t}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^e(\tilde{t}) d\tilde{t} = \\ &= \varphi(t, t_0) \mathbf{D}(t_0) \boldsymbol{\sigma}_o(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(t, \tilde{t}) \frac{\dot{\delta}(\tilde{t})}{1 - \delta(\tilde{t})} \mathbf{D}(\tilde{t}) \boldsymbol{\sigma}_o(t_0) d\tilde{t} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Die viskose Dehnungsrate kann nun durch Ableitung von Gleichung (4.54) ermittelt werden. Analog zur elastischen Dehnungsrate ist es alternativ auch hier möglich, in der Formulierung für den reinen Schädigungsprozess die Zeitableitung der inversen Werkstoffmatrix $\mathbf{D}(t)$ durch das Differential nach dem Schädigungsgrad zu ersetzen:

$$\dot{\mathbf{D}}(t) \rightarrow \frac{\partial \mathbf{D}(\beta, \delta)}{\partial \delta} \dot{\delta} = \frac{\dot{\delta}(t)}{1 - \delta(t)} \mathbf{D}(t) \quad (4.55)$$

Somit ergibt sich für die viskose Dehnungsrate infolge einer einmaligen Spannungsänderung $\boldsymbol{\sigma}(t_0)$ ergänzt um den Anteil $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^\varphi$ infolge der momentanen Spannungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\varphi(t) &= \dot{\varphi}(t, t_0) \mathbf{D}(t_0) \boldsymbol{\sigma}(t_0) && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^\varphi \\ &+ \varphi(t, t) \frac{\dot{\delta}(t)}{1 - \delta(t)} \mathbf{D}(t) \boldsymbol{\sigma}(t) && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{2a}^\varphi \\ &+ \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t_0) \int_{t_0}^t \varphi(t, \tilde{t}) \frac{\dot{\delta}(\tilde{t})}{1 - \delta(\tilde{t})} \mathbf{D}(\tilde{t}) d\tilde{t} && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{2b}^\varphi \\ &+ \varphi(t, t) \mathbf{D}(t) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^\varphi \end{aligned} \quad (4.56)$$

Für eine kontinuierliche Änderung des Spannungszustandes ist wiederum eine Integration über die Belastungszeitpunkte erforderlich. Dies führt letztendlich auf das verallgemeinerte viskoelastische Stoffgesetz für kombinierte Schädigungs- und Erhärtungsprozesse:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^\varphi(t) &= \mathbf{D}(t)\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) && \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^e \\
+ \frac{\dot{\delta}(t)}{1-\delta(t)}\mathbf{D}(t)\boldsymbol{\sigma}(t) &&& \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^e \\
+ \int_0^t \dot{\varphi}(t, \tau)\mathbf{D}(\tau)\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau &&& \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^\varphi \\
+ \varphi(t, t)\frac{\dot{\delta}(t)}{1-\delta(t)}\mathbf{D}(t)\boldsymbol{\sigma}(t) &&& \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{2a}^\varphi \\
+ \int_0^t \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) \int_\tau^t \dot{\varphi}(t, \tilde{t})\frac{\dot{\delta}(\tilde{t})}{1-\delta(\tilde{t})}\mathbf{D}(\tilde{t})d\tilde{t} d\tau &&& \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{2b}^\varphi \\
+ \varphi(t, t)\mathbf{D}(t)\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) &&& \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^\varphi
\end{aligned} \tag{4.57}$$

4.3.7.2 Beispiel

Das bereits in Abschnitt 4.2.7 verwendete einfache Beispiel (Abb. 4-6) soll wiederum die unterschiedlichen Dehnungsanteile demonstrieren. $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{2a}^\varphi$ und $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3^\varphi$ sind in diesem Fall aufgrund des Startwertes der Kriechfunktion und der differentiellen Formulierung identisch Null. Bei Berechnungen mit großen Zeitschritten würden diese Anteile eine beachtenswerte Größenordnung erreichen. Der Einfluß der gleichzeitigen Schädigung und Erhärtung auf die Kriechdehnung wird in Abb. 4-12 im Vergleich mit den Dehnungen des reinen Erhärtungs- bzw. Schädigungsprozesses gezeigt.

4.3.8 Speicherplatzproblematik bei der Umsetzung in einem FE-Programm

Wie aus den Gleichungen (4.47), (4.48) und (4.57) hervorgeht, ist für die Berechnung des viskosen Dehnungszuwachses zum Zeitpunkt t die Auswertung der gesamten Spannungs- und Erhärtungsgeschichte erforderlich. Dies führt bei der Umsetzung in einem FE-Programm zu Schwierigkeiten, da sich für große Systeme mit vielen Zeitschritten ein enormer Speicherplatzbedarf ergibt. Bisher existierten im wesentlichen zwei Methoden, um dieses besonders in früheren Jahren gravierende Problem bei vergleichbaren Stoffgesetzen zu umgehen:

1. Eine elegante Lösung besteht darin, die Nachgiebigkeitsfunktion in Abhängigkeit der Belastungsdauer $(t-t_0)$ anzugeben und in eine Dirichlet-Reihe zu entwickeln [7]. Die Integration liefert unter Mitnahme weniger Reihenglieder eine gute Näherung für das viskoelastische Verhalten, weshalb dieses Vorgehen Eingang in eine Vielzahl von Programmen gefunden hat.

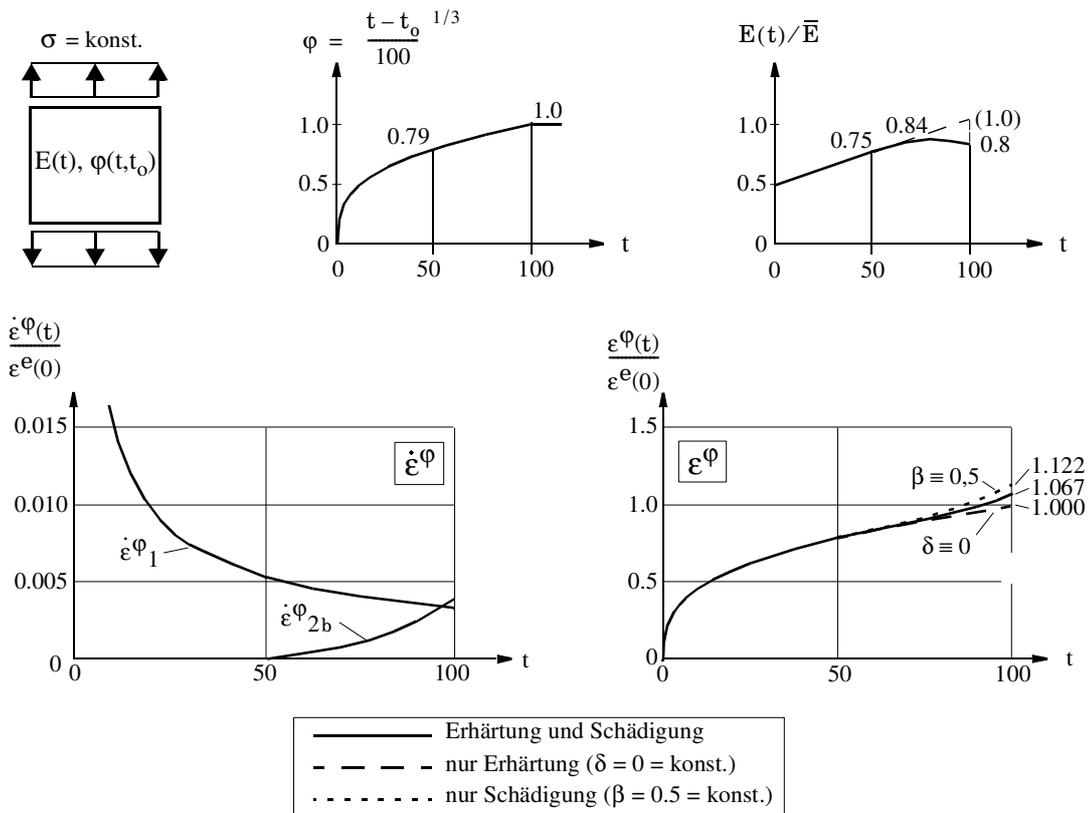


Abb. 4-12: Beispiel zum viskoelastischen Verhalten bei Erhärtung mit gleichzeitiger Schädigung.

2. Eine zweite Lösung wird bei der sogenannten *Rate-of-creep* Methode angewandt (vgl. Abschnitt 4.3.6.2). Die Speicherplatzproblematik hat ihren Ursprung darin, daß die Rate der Kriechfunktion im Stoffgesetz nicht nur abhängig vom Betonalter t , sondern auch vom Belastungsalter t_0 ist. Bei der *Rate-of-creep* Methode wird die Abhängigkeit vom Belastungsalter vernachlässigt, indem eine Ansatzfunktion $\dot{\varphi}(t)$ ausschließlich in Abhängigkeit des Betonalters gewählt wird. Anschaulich bedeutet dies, daß alle Kriechkurven – egal wann die zugehörige Spannungsänderung stattgefunden hat – zum Zeitpunkt t dieselbe Steigung aufweisen müßten (Whitneysche Idealkurven). Diese Annahme stellt eine wesentliche Einschränkung der Methode dar und führt dazu, daß sie lediglich dann erfolgversprechend eingesetzt werden kann, wenn die kriecheerzeugenden Spannungsänderungen konzentriert in einem relativ kleinen Zeitintervall stattfinden [62].

Im Hinblick auf die rasante Entwicklung der Hardware-Kapazitäten und somit auf die Leistungsfähigkeit zukünftig auch in der Praxis zur Verfügung stehender Rechner, ist es durchaus angebracht, über alternative Vorgehensweisen nachzudenken, die eine direkte Umsetzung der Integralgleichung erlauben. Naheliegend wäre eine Abspeicherung der elastischen Dehnungsrategeschichte $\dot{\varepsilon}^e(\tau) = \mathbf{D}(\tau)\dot{\sigma}(\tau)$ bei reinen Erhärtungsphänomenen. Dies birgt allerdings den Nachteil, daß der Speicheraufwand mit fortschreitender Zeit zunimmt, ebenso wie der Speicheraufwand für die ermittelten Resultate.

Eine Alternative bei reinen Erhärtungsphänomenen ist die Speicherung der viskosen Dehnungsratenzukunft. Die Zuwächse der Kriechdehnungen in allen zukünftigen Zeitschritten $j > i$, die aus

dem aktuellen elastischen Dehnungsinkrement $d\boldsymbol{\varepsilon}_i^e$ resultieren, werden in jedem Zeitschritt berechnet und auf die bereits aus vorherigen Zeitschritten gespeicherten Dehnungsinkremente $d\boldsymbol{\varepsilon}_j^p$ aufaddiert. Dies bietet den Vorteil, daß der Speicheraufwand zu Beginn der Berechnung maximal ist und mit fortschreitender Zeitdauer abnimmt, da bereits abgearbeitete Zeitschritte gelöscht werden können. Damit ergibt sich zusammen mit dem zunehmenden Speicherbedarf für die Resultate eine ausgeglichene Speicherbelegung. Dieses Verfahren kann angewandt werden, wenn wie allgemein im Betonbau üblich die Gültigkeit der linearen Viskoelastizitätstheorie und damit das Superpositions-gesetz der viskoelastischen Dehnungen angenommen wird. Es birgt allerdings den Nachteil, daß die Abfolge der Zeitschritte zu Beginn der Berechnung festgelegt sein muß. Eine adaptive Zeitschrittsteuerung ist damit ebensowenig möglich, wie eine Fortsetzung von Rechenläufen.

4.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden nichtlinear-elastische und viskoelastische Werkstoffmodelle für alternde Materialien vorgestellt, welche in Abhängigkeit der Zeit oder anderer äußerer Einflüsse, jedoch unabhängig vom Spannungszustand ihre isotrope Steifigkeit in Form des Elastizitätsmoduls ändern. Die getrennte Ableitung für Phänomene mit zunehmender Steifigkeit (Erhärtung) und abnehmender Steifigkeit (Schädigung, Schmelzen, Aufweichen) führt auf eine neue Art der Darstellung, welche es erlaubt, das physikalisch unterschiedliche Verhalten in einzelnen Termen des Stoffgesetzes zu identifizieren. Aufbauend auf diese Ableitungen kann erstmals ein verallgemeinertes nichtlinear-elastisches und viskoelastisches Stoffgesetz für alternde Materialien angegeben werden, welches die Phänomene der reinen Erhärtung bzw. der reinen Schädigung als Sonderfälle enthält. Neben einer allgemeinen Herangehensweise, welche Fallunterscheidungen überflüssig macht, erlaubt es die Berechnung gemischter Phänomene, wie z.B. die Erhärtung von Beton unter sehr hohen Temperaturen. Alle vorgestellten viskoelastischen Stoffgesetze haben den wesentlichen Vorteil, daß sie direkt aus der Definition der Kriechfunktion abgeleitet wurden und somit die mathematische Umsetzung dieser gebräuchlichen Beschreibungsart für das viskose Verhalten von Beton darstellen. In der vorgeschlagenen Darstellung sind sowohl für das zeitlich veränderliche nichtlinear-elastische wie auch für das viskoelastische Verhalten nur allgemein bekannte und verfügbare Materialkennwerte erforderlich:

- Der isotrope Elastizitätsmodul, gemessen an unbelasteten Probekörpern in Abhängigkeit des Erhärtungs- bzw. Schädigungsgrades.
- Eine zeitlich konstante, für elastische und viskose Verformungen einheitliche Querdehnzahl.
- Eine beliebig formulierte Kriechfunktion $\varphi(t, t_0)$ in Abhängigkeit des Belastungsalters t_0 und des tatsächlichen Betonalters t .

Kapitel 5

Berechnung von Temperatur- und Verschiebungsfeldern mit der Finite-Element-Methode

5.1 Kopplung der physikalischen Grundprobleme

5.1.1 Allgemeines

Im allgemeinen sind die zugrunde liegenden physikalischen Probleme des Feuchte- und Wärmetransportes sowie der Mechanik miteinander gekoppelt. Inwieweit eine rechnerische Erfassung dieser Kopplung für baupraktische Berechnungen relevant ist, soll in diesem Abschnitt diskutiert werden.

In guter Näherung können bei kleinen Verformungen und bei langsam ablaufenden Änderungen der Zustandsgrößen Feuchte- und Wärmetransportvorgänge vom mechanischen Verhalten eines Kontinuums entkoppelt betrachtet werden. Die Wärmezustandsgrößen beeinflussen jedoch das mechanische Verhalten (einseitige Kopplung) [143]. Bei der Berechnung hydratisierender Betonbauteile tritt als zusätzlich koppelnder Effekt der Fortschritt der Hydratation in Form des Hydratationsgrades auf. Der Hydratationsgrad α reguliert in Abhängigkeit des wirksamen Betonalters, also in Abhängigkeit der Realzeit und der Erhärtingsbedingungen, die Wärmeproduktion des Betons und geht in die Berechnung der Verschiebungsfelder durch die Abhängigkeit der Werkstoffparameter ein (Abb. 5-1).

Nach Argyris et al. [1] kann bei geringen Austrocknungsgeschwindigkeiten der Wärmetransport unabhängig vom Feuchte-transport im Beton untersucht werden, wobei jedoch eventuell eine Abhängigkeit der thermischen Eigenschaften vom aktuellen Feuchtezustand zu berücksichtigen ist [87].¹ Für Normalbeton mit einem Wasserzementwert größer 0,4, wie er für die angestellten Untersuchungen vorausgesetzt wird, kann in der Regel auf eine explizite Feuchteberechnung verzichtet werden. Die Feuchteabhängigkeit der thermischen und mechanischen Materialparameter wird in der vorliegenden Arbeit im Mittel durch die empirische Abhängigkeit vom Hydratationsgrad berücksichtigt, der in erster Näherung einen Anhalt für den Feuchtezustand in der Erhärtingsphase darstellt.

1. Bei einer plötzlichen Änderungen des Temperatur- und Feuchtezustandes, z.B. bei einer schlagartigen Abkühlung der Betonoberfläche durch kaltes Wasser, ist die entkoppelte Betrachtung von Wärme- und Feuchteleitung bei nicht mehr ohne weiteres zulässig.

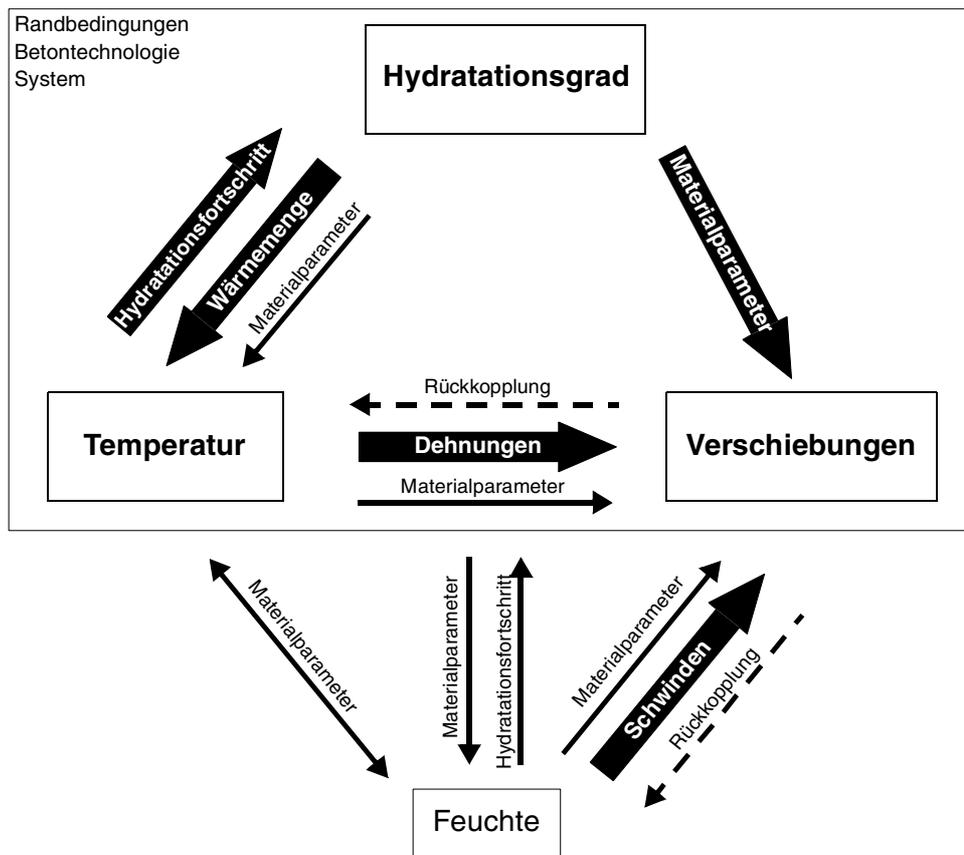


Abb. 5-1: Kopplung von Hydratation, Temperatur, Feuchte und Verschiebungen/Spannungen.

5.1.2 Arten der Kopplung von thermomechanischen Berechnungen

Es lassen sich grundsätzlich verschiedene Grade der Kopplung von Temperatur- und Spannungsproblem unterscheiden, die für die behandelten Problemstellungen sinnvoll sind:

A Volle Kopplung

Die Berechnung der Temperatur- und Verschiebungsfelder erfolgt simultan. Dem Vorteil der Berücksichtigung des vollständigen Kopplungseffektes steht der Nachteil gegenüber, daß sich neben der aufwendigen Theorie die Bestimmung geeigneter, die Kopplung beschreibender Materialparameter aufwendig gestaltet. Die volle Kopplung wurde in den Arbeiten von Hamfler [87] und Huckfeldt [97] sowie ohne Berücksichtigung der Hydratation von Miehe [143] untersucht.

B Einseitige Kopplung mit Hydrationsberechnung

Bei der einseitigen Kopplung wird der Hydrations- und Temperaturzustand vorab getrennt vom Verschiebungszustand nur für den aktuellen Zeitschritt oder für den gesamten betrachteten Zeitraum berechnet. Die Spannungs-Verformungsberechnung erfolgt mit gebräuchlichen FE-Verfahren, wobei die Materialkennwerte abhängig vom Hydratationsgrad angesetzt werden, und der Temperaturver-

lauf in Form eines statischen Lastfalles verarbeitet wird. Auch eine Temperaturabhängigkeit der mechanischen Materialparameter kann berücksichtigt werden, jedoch nicht eine Rückkopplung der Mechanik auf den Temperaturzustand.

C Einseitige Kopplung ohne Hydratationsberechnung

Falls das verwendete Programm nicht die Möglichkeit bietet, Hydratationsfelder zu berechnen, muß die Hydratationswärmemenge $q(t)$ als äußere Wärmequelle eingegeben werden, wobei der Einfluß des Temperaturzustandes auf den Hydratationsfortschritt, der je nach Erhärtungsbedingung erheblich sein kann, vernachlässigt wird. Dieses Vorgehen ist dann sinnvoll und dem Kopplungsgrad B quasi gleichwertig, wenn Messungen vorliegen, welche die Wärmeentwicklung der verwendeten Betonrezeptur unter Bauwerksbedingungen beschreiben. Um die Materialparameter für die Spannungs-Verformungsberechnung zu erhalten, muß entweder von Hand für jeden Zeitschritt der Hydratationsgrad α aus Gleichung (2.4) berechnet werden, oder es liegen ebenfalls Versuchsergebnisse für bestimmte Betonalter unter Bauwerksbedingungen vor, zwischen denen evtl. weitere Zeitpunkte interpoliert werden können. Der Temperaturzustand wird wie bei B als statischer Lastfall aufgebracht.

D Überschlägige Methode mit Ersatztemperaturen

Eine einfache, jedoch auch relativ ungenaue Vorgehensweise besteht darin, nicht nur die gegenseitige Kopplung, sondern auch die Zeitabhängigkeit des Problems zu vernachlässigen. Dazu wird in einem Rechenschritt eine Ersatztemperaturlast $\Delta\vartheta_{\text{ers}}$ auf das statische System mit einem Ersatz-Elastizitätsmodul E_{ers} aufgebracht und der Spannungszustand berechnet. Die Ersatztemperatur wird in der Regel als Differenz zwischen der sogenannten zweiten Nullspannungstemperatur und der Umgebungstemperatur gewählt (vgl. Abschnitt 7.1). Die Bestimmung einer Ersatzsteifigkeit ist sehr vage, da nicht nur ein Mittelwert des E-Moduls gebildet werden muß, sondern auch das viskose Verhalten durch eine Abminderung der Steifigkeit erfaßt werden soll. Das Ergebnis läßt sich verbessern, indem man den betrachteten Zeitraum in Abschnitte unterteilt.

5.1.3 Gekoppelte Berechnungen mit der FEM

Die Lösung des gekoppelten Problems mit der Methode der Finiten Elemente führt auf ein Gleichungssystem für die Zuwächse der Knotenverschiebungen und Knotentemperaturen:

$$\begin{aligned} \text{Globales Kräftegleichgewicht:} \quad dF_i = 0: & \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{F}_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\mathfrak{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\bar{\mathbf{p}}_V \\ d\bar{\mathbf{q}}_V \end{bmatrix} \\ \text{Globale Energieerhaltung:} \quad dQ_i = 0: & \quad \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_u & \mathbf{K}_\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\mathfrak{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\bar{\mathbf{p}}_V \\ d\bar{\mathbf{q}}_V \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Die Untermatrix \mathbf{F}_ϑ stellt den Einfluß des Temperaturzustandes auf das Kräftegleichgewicht dar. Im wesentlichen sind dies die Festhaltekräfte infolge der noch unbekanntenen Temperaturdehnungen. Die Untermatrix \mathbf{Q}_u beinhaltet den Beitrag des Verformungszustandes zum Wärmefluß. Zum einen können dies thermodynamische Effekte sein, die jedoch bei den hier betrachteten Problemen um mehrere Größenordnungen klein gegenüber den sonstigen Beiträgen sind [143]. Zum anderen führt Huckfeldt [97] an dieser Stelle eine Rückkopplung des Spannungszustandes auf das wirksame Betonalter ein. Auch dieser Einfluß ist für die vorliegenden Probleme untergeordnet und wird deshalb in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Somit entfällt der Koppelterm \mathbf{Q}_u , und es entsteht eine einseitige Entkopplung des Problems derart, daß zuerst der Temperaturzustand unabhängig vom Verfor-

mungszustand berechnet werden kann. Im folgenden werden deshalb die Grundlagen für die Kopplungsgrade B , C und D dargestellt.

Bogert et al. [21] geben einige Hinweise zur gekoppelten Berechnung mit der FEM. Für die konsistente Übernahme von Temperaturlasten in eine Verformungs-Spannungsanalyse sind bei letzterer Elemente mit einem um eine Ordnung höheren Ansatz zu verwenden, wenn das FE-Netz beibehalten wird. Dazu ein Beispiel: Werden bei der Temperaturberechnung einer Scheibe wie üblich vierknotige Elemente mit bilinearem Ansatz für den Temperaturverlauf verwendet, ist das Ergebnis eine bilineare Temperaturverteilung in jedem Element. Um die zugehörige Dehnungsverteilung für diesen Lastfall korrekt wiedergeben zu können, ist ein flächengleiches Scheibenelement mit biquadratischen Ansätzen für die Verschiebungen notwendig. Die Temperaturen und Hydratationsgrade, die folglich ebenfalls auch bilinear über das Element verteilt sind, werden in die Integrationspunkte des Scheibenelementes interpoliert.

5.2 Berechnung von Temperaturfeldern infolge Hydratationswärme

5.2.1 Allgemeines

Die Berechnung von Temperaturfeldern mittels der FEM bedarf für die vorliegende Problemstellung keiner theoretischen Erweiterung. Deshalb werden die Grundlagen in knapper Form dargestellt. Huckfeldt [97] gibt eine Ableitung aus den allgemeinen Grundgleichungen der Thermodynamik an, aus der die Idealisierungen deutlich werden, die letztendlich ebenfalls zum bekannten Gesetz der linearen Wärmeleitung führen. Die Berechnungsgrundlagen beruhen auf folgenden Annahmen:

- Langsame Prozeßgeschwindigkeiten (Vernachlässigung dynamischer Effekte).
- Wärmetransport nur durch Wärmeleitung mit linearem Wärmeleitungsgesetz (*Fourier*). Vernachlässigung der Energieübertragung durch Stofftransport, Konvektion und Strahlung (außer am Rand).
- Mittelung der thermischen Eigenschaften des mehrphasigen, inhomogenen Betongefüges als homogener und isotroper Stoff.
- Hygroskopische Einflüsse auf die Materialparameter werden nur im Mittel in Form der Abhängigkeit vom Hydratationsgrad erfaßt.
- Thermomechanische Wärmeleistungen inelastischer Verzerrungen werden vernachlässigt.

5.2.2 Theorie der Feldprobleme

Die sogenannten Feldprobleme stellen eine geeignete Beschreibung für verschiedene physikalische Probleme, insbesondere der Diffusion, dar. Allgemein kann als Ausgangspunkt eine Bilanzgleichung für eine Zustandsgröße z im Gebiet Ω der Form

$$C\dot{z} + \nabla^T \mathbf{p} = \bar{q}_V \quad (5.2)$$

Speicherung Leitung Quelle

durch Einführung eines linearen Leitgesetzes

$$\mathbf{p} = -\boldsymbol{\lambda} \nabla z \quad (5.3)$$

mit der Leitfähigkeitsmatrix $\boldsymbol{\lambda}$ durch folgende parabolische Differentialgleichung ausgedrückt werden:

$$C \dot{z} - \nabla^T(\boldsymbol{\lambda} \nabla z) = \bar{q}_V \quad (5.4)$$

Wird wie im vorliegenden Fall von einem homogenen Material mit isotropen Leitfähigkeitseigenschaften ausgegangen, vereinfacht sich Gleichung (5.4) mit dem Laplace-Operator $D = \tilde{\mathbf{N}}^T \nabla$ zu:

$$C \dot{z} - \lambda \Delta z = \bar{q}_V \quad (5.5)$$

Sind verschiedene Zustandsgrößen zu betrachten, so sind die zugehörigen Gleichungen miteinander gekoppelt, wenn sich die Prozesse gegenseitig beeinflussen. Man erhält dann ein System gekoppelter Differentialgleichungen [153]. Zur Lösung der Differentialgleichungen sind Anfangs- und Randbedingungen notwendig. Anfangsbedingungen geben zum Zeitpunkt $t = t_0$ die Zustandsgrößen z an. Für die Randbedingungen hat sich folgende Unterscheidung eingebürgert:

Randbedingung 1. Art (Dirichlet Randbedingung)

Auf dem Rand Γ_1 ist die Zustandsgröße \bar{z} vorgeschrieben:

$$z|_{\Gamma_1} = \bar{z}(t) \quad (5.6)$$

Randbedingung 2. Art (inhomogene Neumann Randbedingung)

Auf dem Rand Γ_2 ist die Flußgröße \bar{p}_n vorgeschrieben:

$$\mathbf{n}^T(-\boldsymbol{\lambda} \nabla z) = \bar{p}_n(t) \quad \text{mit } \mathbf{n} \text{ Normalenvektor auf } \Gamma_2 \quad (5.7)$$

Der Sonderfall der idealen Isolierung $\bar{p}_n = 0$ stellt die *natürliche* oder *homogene Neumann Randbedingung* des Problems dar.

Randbedingung 3. Art (Robin oder Robin-Neumann Randbedingung)

Speziell bei Wärme- und Stofftransportvorgängen treten an den Strukturrändern Übergangseffekte z.B. in Form von Konvektion zum umgebenden Medium auf. Ein physikalisches Modell stellt die Annahme dar, daß sich der Fluß p_n proportional zum Gefälle der Zustandsgröße zwischen Umgebung und Oberfläche einstellt. Um dies abzubilden, wird der Fluß senkrecht zur Oberfläche p_n mit der vorgegebenen Zustandsgröße des umgebenden Mediums \bar{z}_Γ durch einen Übergangskoeffizienten l_Γ auf dem Rand Γ_3 gekoppelt.

$$\mathbf{n}^T(-\boldsymbol{\lambda} \nabla z) = \lambda_\Gamma(z - \bar{z}_\Gamma) = p_n(t) \quad (5.8)$$

Diese Randbedingung enthält die Randbedingung 1. Art ($l_\Gamma \rightarrow \infty$) und die natürliche Randbedingung 2. Art ($l_\Gamma \rightarrow 0$) als Sonderfälle.

5.2.3 Grundgleichungen der instationären Wärmeleitung

Die im vorigen Abschnitt in allgemeiner Form aufgestellten Grundgleichungen werden nun auf das Problem der instationären Wärmeleitung bei hydratisierendem Beton spezialisiert:

| Allgemeine Bezeichnung | Instationäre Wärmeleitung | Einheit |
|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| Zustandsgröße z | Temperatur ϑ | [K] bzw. [°C] |
| Fluß p | Wärmefluß p | [W/m ²] |
| Quelle \bar{q}_V | Wärmequelle \bar{q}_V | [W/m ³] |
| Leitfähigkeit λ | Wärmeleitfähigkeit λ (siehe Abschnitt 3.2.1) | [W/mK] |
| Speicherkoeffizient C | Wärmekapazität $C = c\rho$ (siehe Abschnitt 3.2.2) | [J/m ³ K] |
| Übergangskoeffizient λ_Γ | Wärmeübergangskoeffizient λ_Γ oder $\alpha_{\ddot{u}}$ | [W/m ² K] |

Tabelle 5.1: Größen bei der instationären Wärmeleitung.

Somit ergibt sich die Differentialgleichung der instationären Wärmeleitung aus Gleichung (5.5), wenn eine isotrope, konstante Wärmeleitfähigkeit λ unterstellt wird:

$$c\rho \dot{\vartheta} - \lambda \Delta \vartheta = \bar{q}_V \quad (5.9)$$

Analog erhält man aus den Gleichungen (5.6), (5.7) und (5.8) die Randbedingungen für den Fall der instationären Wärmeleitung. Die natürliche Randbedingung entspricht einer idealen Isolation des Randes. Der Term \bar{q}_V für die Wärmequellen im Gebiet beschreibt bei Hydratationsvorgängen die Wärmeentwicklung des Betons, die nach Gleichung (2.10) in Abhängigkeit des Hydratationsgrades beschrieben werden kann:

$$\bar{q}_V = \dot{\alpha} \cdot Q_\infty \quad (5.10)$$

Damit ergibt sich die spezialisierte Form von Gleichung (5.9):

$$c\rho \dot{\vartheta} - \lambda \Delta \vartheta = \dot{\alpha} \cdot Q_\infty \quad (5.11)$$

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß in dieser Darstellung weder mechanische Einflüsse noch Einflüsse von Stofftransportvorgängen auf die Wärmeleitung enthalten sind. Erstere lassen sich in aller Regel, letztere bei langsamen Prozeßgeschwindigkeiten mit guter Näherung vernachlässigen [72, 97, 103].¹

1. Die Grundgleichungen für die gekoppelte instationäre Wärme- und Feuchteleitung finden sich z.B. in [153] und [171].

5.2.4 Finite-Element-Methode für instationäre Wärmeleitungsprobleme

5.2.4.1 Globale Formulierung mit Hilfe des Galerkin-Verfahrens

Eine analytische Lösung von Gleichung (5.9) ist nur in Sonderfällen möglich [228]. Eine Möglichkeit, um zu einer schwachen Formulierung als Grundlage für ein Finite-Element-Verfahren zu gelangen, besteht in der Methode nach Galerkin. Die Differentialgleichung wird mit einer Wichtungsfunktion, die in Analogie zum Prinzip der virtuellen Arbeit mit $\delta\vartheta$ bezeichnet wird, multipliziert und über das betrachtete Gebiet Ω integriert:

$$\int_{\Omega} \delta\vartheta (\lambda \Delta\vartheta) d\Omega + \int_{\Omega} \delta\vartheta c\rho \dot{\vartheta} d\Omega = \int_{\Omega} \delta\vartheta \bar{q}_V d\Omega \quad (5.12)$$

Mit dem Satz von Gauß sowie den Randbedingungen 2. und 3. Art erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla\delta\vartheta) \lambda (\nabla\vartheta) d\Omega + \int_{\Omega} \delta\vartheta c\rho \dot{\vartheta} d\Omega + \int_{\Gamma_3} \delta\vartheta \lambda_{\Gamma} \vartheta d\Gamma_3 = \\ = \int_{\Omega} \delta\vartheta q_V d\Omega + \int_{\Gamma_2} \delta\vartheta \bar{q}_n d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} \delta\vartheta \lambda_{\Gamma} \bar{\vartheta}_{\Gamma} d\Gamma_3 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Zur numerischen Lösung werden beim klassischen Galerkin-Verfahren für ϑ und $\delta\vartheta$ je Element die gleichen Ansatzfunktionen verwendet, welche die wesentlichen Randbedingungen 1. Art a priori erfüllen. Für Berechnungen der Wärmeentwicklung im hydratisierenden Beton hat es sich bewährt, lineare Ansatzfunktionen \mathbf{N} mit den Knotenfreiwerten ϑ_K bzw. $\delta\vartheta_K$ zu wählen:

$$\vartheta = \mathbf{N}\mathfrak{S}_K \text{ und } \nabla\vartheta = \mathbf{B}\mathfrak{S}_K \quad (5.14)$$

$$\delta\vartheta = \mathbf{N}\delta\mathfrak{S}_K \text{ und } \nabla\delta\vartheta = \mathbf{B}\delta\mathfrak{S}_K \quad (5.15)$$

Damit erhält man das Gleichungssystem zur Bestimmung der Knotentemperaturen:

$$\mathbf{K}\mathfrak{S}_K + \mathbf{C}\dot{\mathfrak{S}}_K = \mathbf{Q} \quad (5.16)$$

mit Konduktivitätsmatrix $\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_3} \mathbf{N}^T \lambda_{\Gamma} \mathbf{N} d\Gamma_3$ (5.17)

Kapazitätsmatrix $\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T c\rho \mathbf{N} d\Omega$ (5.18)

Wärmequellvektor $\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T q_V d\Omega + \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}^T \bar{q}_n d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_3} \mathbf{N}^T \lambda_{\Gamma} \bar{\vartheta}_{\Gamma} d\Gamma_3$ (5.19)

5.2.4.2 Zeitintegration

Den Ausgangspunkt für die Berechnung bilden die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$, der normalerweise dem Beginn der Wärmeentwicklung im Frischbeton entspricht und für den $\alpha(0) = 0$ gilt. Die Berechnung der Zustandsgrößen erfolgt durch Lösen von Gleichung (5.16) in Zeitschritten, die entweder vorgeschrieben oder vom Programm adaptiv angepaßt werden. Die Größe der Zeitschritte der Temperaturberechnung müssen sich in erster Linie an der Entwicklung der Hydratationswärme orientieren. Zu Beginn der Wärmefreisetzung treten große Gradienten in der Energiefreisetzung auf, die entsprechend kleine Zeitschritte erforderlich machen. Wang und Dilger [234] empfehlen in den ersten 48 Stunden Zeitschritte von je 1 Stunde, um die Spitzen der Wärmefreisetzung nicht zu kappen. Danach können die Zeitschritte größer gewählt werden. Wenn im Verlauf der Berechnung erneut eine starke Veränderlichkeit auftritt, z.B. durch das Anbetonieren eines neuen Bauabschnittes, müssen die Zeitschritte natürlich wieder verkleinert werden.

Die numerische Lösung der Zeitschrittintegration erfolgt in der Regel mit einer verallgemeinerten Trapezregel.¹ Um die Zustandsgrößen am Ende eines Zeitschrittes $t + \Delta t$ zu erhalten, wird Gleichung (5.16) zum Zeitpunkt $t + \alpha_t \Delta t$ ausgewertet. Je nach Größe des Faktors α_t unterscheidet man verschiedene Integrationsverfahren [1]:

- $\alpha_t=0$ Explizite Integration (*Euler vorwärts*): Genauigkeit erster Ordnung. Stabilität nur bei Einhaltung einer oberen Grenze für den Zeitschritt.
- $\alpha_t=0.5$ (*Crank-Nicolson*): Genauigkeit zweiter Ordnung. Stabil, jedoch wegen fehlender numerischer Dämpfung anfällig für Oszillationen.
- $\alpha_t=2/3$ (*Galerkin*): Genauigkeit erster Ordnung, unbedingt stabil.
- $\alpha_t=1$ (*Euler rückwärts*): Genauigkeit erster Ordnung. Unbedingt stabil und ohne Oszillationen aufgrund numerischer Dämpfung.

Für implizite Zeitintegrationsverfahren ($\alpha_t > 0$) soll das Verfahren kurz erläutert werden: Die Berechnung der Zustandsgrößen \mathfrak{S} zum Kollokationszeitpunkt

$$\tilde{t} = t + \alpha_t \cdot \Delta t \quad (5.20)$$

erfolgt ausgehend von den Zustandsgrößen \mathfrak{S} zum Zeitpunkt t mit Gleichung (5.16):

$$\mathbf{K}^{\tilde{t}} \tilde{\mathfrak{S}} + \mathbf{C}^{\tilde{t}} \frac{\tilde{\mathfrak{S}} - \mathfrak{S}}{\alpha_t \Delta t} = \mathbf{Q}^{\tilde{t}} \quad (5.21)$$

Dies läßt sich umformen in ein Gleichungssystem zur Bestimmung des Temperaturfeldes $\tilde{\mathfrak{S}}$:

$$\begin{aligned} (\alpha_t \Delta t \mathbf{K}^{\tilde{t}} + \mathbf{C}^{\tilde{t}}) \tilde{\mathfrak{S}} &= \alpha_t \Delta t \mathbf{Q}^{\tilde{t}} + \mathbf{C}^{\tilde{t}} \mathfrak{S} \\ \tilde{\mathbf{K}} \quad \tilde{\mathfrak{S}} &= \quad \tilde{\mathbf{Q}} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Auch Systemwechsel zum Zeitpunkt t , also das Anbetonieren weiterer Bauteile, können mit Gleichung (5.22) automatisch erfaßt werden. Die Ausgangstemperaturen der neuen Elemente gehen über

1. Huckfeldt [97] beschreibt weiterführende Verfahren der Zeitschrittintegration mit Hilfe Galerkinscher Wichtungsfunktionen in Verbindung mit adaptiven Verfahren.

ϑ in die rechte Seite des Gleichungssystems ein. Die Temperaturen am Ende des Zeitschrittes ergeben sich durch Extrapolation nach der Lösung von Gleichung (5.22):

$$\vartheta^{t+\Delta t} = \vartheta + \frac{\tilde{\vartheta} - \vartheta}{\alpha_t \Delta t} \Delta t = \vartheta + \frac{\tilde{\vartheta} - \vartheta}{\alpha_t} \quad (5.23)$$

5.2.5 Wahl der Temperaturrendbedingungen

5.2.5.1 Wärmeübergangskoeffizient

Eine wichtige Bedeutung kommt der Modellierung der Temperaturrendbedingungen des hydratisierenden Bauteils zu. Bei freien Betonoberflächen ist der Wärmeübergangskoeffizient λ_Γ bzw. $\alpha_{\ddot{u}}$ unter Berücksichtigung der Windgeschwindigkeit und der Wärmestrahlung anzusetzen (vgl. z.B. [87, 97]), wobei gegebenenfalls eine mögliche Bandbreite zu berücksichtigen ist. Wird die Betonoberfläche zeitweise abgedeckt, so kann auch dies über den Wärmeübergangskoeffizienten simuliert werden, indem ein Ersatzwert für die Reihenschaltung aus Wärmeübergang und Dämmschicht (Dicke d_D , Wärmeleitfähigkeit λ_D) berechnet wird:

$$\lambda_{\Gamma, \text{ers}} = \frac{1}{(1/\alpha_{\ddot{u}} + d_D/\lambda_D)} \quad (5.24)$$

Wenn Risse diskret modelliert werden, muß darauf geachtet werden, daß an den Ufern der Rißelemente passende Temperaturrendbedingungen eingegeben werden. Am sinnvollsten ist es, die Temperaturfreiheitsgrade der korrespondierenden Knoten der Rißufer zu koppeln. Theoretisch wäre es auch möglich, nach Öffnung des Risses diese Kopplung aufzuheben und einen Rand entsprechend des Rißverlaufes mit Wärmeübergang zu modellieren. Da jedoch keine Angaben über passende Wärmeübergangskoeffizienten, die sicherlich kleiner als an einer freien Oberfläche anzusetzen sind, vorlagen, wurde in dieser Arbeit darauf verzichtet.

5.2.5.2 Auswirkung tageszeitlicher Temperaturschwankungen

Die tageszeitlichen Temperaturschwankungen erscheinen als aufmodulierte Welle im globalen Temperaturverlauf infolge Hydratation, wobei die Intensität abhängig von der Bauteilgeometrie und der Lage im Bauteil ist. Unzweifelhaft beeinflussen die Tag-Nacht-Temperaturwechsel den Temperaturverlauf an der Bauteiloberfläche. Uneinigkeit besteht allerdings darüber, ob dies in jedem Fall bei der Temperaturberechnung zu berücksichtigen ist [158], oder ob der Einfluß gegenüber den Veränderungen aus Hydratation untergeordnet ist. Die Ergebnisse in dieser Arbeit (vgl. Abschnitt 8.2.4) und von Yamazaki et al. [245] bestärken letztere These.

In der Planungsphase ist es praktisch unmöglich, den tageszeitlichen Temperaturverlauf treffend vorherzusagen. Deshalb erscheint es sinnvoll, im Planungsstadium Parameterstudien mit verschiedenen, am Bauzeitenplan orientierten mittleren Tagestemperaturen durchzuführen. Als ungünstigster Fall ist hierbei zu berücksichtigen, daß im Zeitraum der Betonerwärmung hohe Umgebungstemperaturen vorherrschen, während in der Abkühlungsphase verhältnismäßig niedrige Außentemperaturen anzunehmen sind, die eventuell ungünstig mit hohen Wärmeübergangszahlen aufgrund hoher Windgeschwindigkeiten zu kombinieren sind.

5.3 Berechnung von Hydratationsgradfeldern

Die Ermittlung des Hydratationsgrades steht in engem Zusammenhang mit der Berechnung der Temperaturfelder. Die Anfangsbedingung für $t = 0$ lautet in der Regel $\alpha = 0$. Der Beginn der Rechnung entspricht somit dem Beginn des exothermen Hydratationsprozesses. Im allgemeinen ist dies nicht der Zeitpunkt des Betonierens, da zunächst eine Ruhephase ohne Wärmeentwicklung von wenigen Stunden angenommen werden kann.

Das Vorgehen zur Bestimmung von $\alpha(t)$ unterscheidet sich je nach Rechenverfahren und Kopplungsgrad (vgl. Abschnitt 5.1.2). Erfolgt eine Berechnung der Temperaturfelder mit paralleler Hydratationsberechnung (Kopplungsgrade *A* oder *B*), so ergibt sich die Wärmemenge, die in einem Zeitschritt infolge Hydratation entsteht, aus den Gleichungen (2.3) und (2.4):

$$q_V dt = \frac{dQ}{dt} dt = \dot{\alpha} Q_\infty dt \quad (5.25)$$

Die Rate des Hydratationsgrades $\dot{\alpha}$ wird aus den Ansatzfunktionen für $\alpha(\tau_w)$ (vgl. Abschnitt 2.3.3) und $\tau_w(t)$ (vgl. Abschnitt 2.3.2) bestimmt. Nach der Berechnung der Temperaturzuwächse eines Zeitschrittes kann das wirksame Alter und somit der Hydratationsgrad ausgewertet werden, woraus sich wiederum die neuen Wärmefreisetzungsraten für den nächsten Zeitschritt bestimmen lassen.

Wird bei einem Rechenverfahren ohne explizite Hydratationsberechnung (Kopplungsgrad *C*) der Verlauf der Wärmefreisetzung $q(t)$ z. B. aus Versuchsergebnissen vorgegeben, so ist ein Ansatz für α nicht erforderlich. Der Hydratationsgrad wird als Leitwert für die Veränderlichkeit der mechanischen Materialparameter aus

$$\alpha(t) = \frac{1}{Q_\infty} \int_0^t q dt \quad (5.26)$$

berechnet. Es hat sich als sinnvoll herausgestellt, zur Kontrolle die gesamte freizusetzende Wärmemenge Q_∞ aus der Bedingung

$$\int_0^\infty q dt = Q_\infty \quad (5.27)$$

mit dem vorgegebenen $q(t)$ Verlauf programmintern zu berechnen. Passen die Eingaben für $q(t)$ und Q_∞ nicht zusammen, so ist dies ein Indiz für einen Eingabefehler oder für zu große Zeitschritte. Falsch berechnete Hydratationsgrade führen zwangsläufig zu einer Fehleinschätzung der Entwicklung der mechanischen Materialparameter und deshalb mit großer Wahrscheinlichkeit zu unbrauchbaren Ergebnissen.

5.4 Berechnung von Verschiebungsfeldern gerissener Betonstrukturen

5.4.1 Grundlagen

An dieser Stelle wird nicht auf die Grundlagen der Kontinuumsmechanik für thermoelastische Probleme im allgemeinen eingegangen [vgl. z.B. 157]. Es sollen vielmehr die für eine praktische Berechnung des Spannungszustandes in hydratisierenden Betonbauteilen notwendigen Grundlagen angegeben werden. Es werden dabei nur nichtlinear-elastische Berechnungsverfahren behandelt.

Die thermodynamische Rückkopplung des Spannungszustandes auf den Temperaturzustand kann für baupraktische Probleme vernachlässigt werden [143]. Die Rückkopplung des Rißzustandes auf den Hydratationsverlauf wurde von Huckfeldt [97] in verschmierter Weise erfaßt. Auch dieser Effekt wird bis auf einige Spezialfälle von untergeordneter Bedeutung sein. Somit kann davon ausgegangen werden, daß sowohl der Temperaturzustand als auch der Hydratationsgrad vor Beginn der Verformungsberechnung bekannt sind, wodurch auf eine Darstellung der vollständigen thermomechanischen Kopplung (A) verzichtet werden kann. Für die verschiedenen Grade der einseitigen Kopplung (B, C oder D) ergibt sich bei bekanntem Temperaturzustand die thermoelastische Differentialgleichung nach Stein und Barthold [220] aus dem Gleichgewicht

$$\sigma_{ij,i} + \bar{p}_V = 0, \quad (5.28)$$

der Kinematik für kleine Verschiebungen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.29)$$

und dem Stoffgesetz

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} + (\alpha_T \vartheta + \varepsilon_s) \delta_{ij}. \quad (5.30)$$

Da analytische Lösungen nur für ausgesuchte Sonderfälle möglich sind [157], ist es vorteilhaft, die schwache Form des Gleichgewichts in Form eines Arbeitsprinzipes anzuwenden:

$$\delta W = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}_V d\Omega - \int_{\Gamma_p} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}}_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (5.31)$$

Durch Einführung von Ansatzfunktionen \mathbf{N} in Abhängigkeit der unbekanntenen Verschiebungszuwächse $\Delta \mathbf{u}$ in diskreten Knoten kann das Verschiebungsfeld $\Delta \mathbf{v}$ ausgedrückt werden durch

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{N} \Delta \mathbf{u}. \quad (5.32)$$

Die Dehnungszuwächse ergeben sich aus den Verschiebungszuwächsen über die kinematische Beziehung

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}. \quad (5.33)$$

Ist das Stoffgesetz, das den Zusammenhang zwischen Dehnungen und Spannungen bestimmt, zeitabhängig und in Ratenform gegeben, kann durch eine Zeitintegration analog zu Abschnitt 5.2.4 der Übergang zu einer inkrementellen Beziehung erfolgen. Oft ist es jedoch vorteilhaft, direkt von der inkrementellen Form des Stoffgesetzes auszugehen (vgl. Anhang C). Im folgenden wird von einer additiven Zerlegung der Gesamtverzerrungen ausgegangen, wobei \mathbf{E} bei nichtlinearem Materialverhalten eine Linearisierung im Rahmen eines nichtlinearen Iterationsalgorithmus darstellt:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (5.34)$$

$$\text{mit } \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^\varphi - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^\vartheta - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^s - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^r \quad \text{und} \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^\vartheta + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^s = (\alpha_T \Delta \vartheta + \Delta \varepsilon_s) \mathbf{I}$$

Mit der numerisch zu integrierenden Steifigkeitsmatrix im globalen Koordinatensystem

$$\mathbf{K}^i = \sum_{El} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E}(t_i) \mathbf{B} d\Omega \quad (5.35)$$

erhält man das Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Knotenverschiebungszuwächse $\Delta \mathbf{u}^i$ eines Last- bzw. Zeitschrittes i , welches anschaulich den Gleichgewichtsbedingungen an den Knoten entspricht:

$$\mathbf{K}^i \Delta \mathbf{u}^i = \Delta \mathbf{P}^i = \mathbf{P}_{\text{ext}}^i - (\mathbf{P}_{\text{int}}^{i-1} + \Delta \mathbf{P}_{\text{int}}^i) \quad (5.36)$$

Der Vektor $\Delta \mathbf{P}^i$ stellt dabei die Ungleichgewichtskräfte jedes Knotens zum Gleichgewichtszustand des vorherigen Lastschrittes als Differenz zwischen den internen und externen Knotenkräften dar:

$$\text{Knotenlasten:} \quad \mathbf{P}_{\text{ext}}^{\text{KL}} = \sum_{K_n} \bar{\mathbf{p}} \quad (5.37)$$

$$\text{Elementlasten:} \quad \mathbf{P}_{\text{ext}}^{\text{EL}} = \sum_{El} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}}_V d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}}_{\Gamma} d\Gamma \quad (5.38)$$

$$\text{Verformungslasten:} \quad \mathbf{P}_{\text{ext}}^{\Delta \bar{\mathbf{u}}} = - \sum_{El} \mathbf{K} \Delta \bar{\mathbf{u}} \quad (5.39)$$

$$\text{Innere Kräfte aus dem vorherigen Schritt:} \quad \mathbf{P}_{\text{int}}^{i-1} = \sum_{El} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{i-1} d\Omega \quad (5.40)$$

Die Dehnungsänderungen im aktuellen Schritt infolge von Temperatur, Schwinden, Rissen oder Kriechen aus Spannungsänderungen früherer Lastschritte werden als eingeprengte Dehnungen erfasst und gehen in die rechte Seite des Gleichungssystems ein:

$$\text{Eingeprägte Dehnungen: } \Delta \mathbf{P}_{\text{int}}^{\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = - \sum_{\text{El } \Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega \quad (5.41)$$

Die Berücksichtigung einer Schädigung durch einen Schädigungsgrad δ entsprechend Gleichung (4.18) äußert sich außer in einer Reduktion der aktuellen Steifigkeit auch als Verringerung der inneren Kräfte aus dem vorherigen Schritt in Gleichung (5.36). Dies entspricht anschaulich dem Freiwerden desjenigen Anteils der Spannungen, welcher durch den geschädigten Anteil des Querschnitts aufgenommen wurde:

$$\text{Schädigungszuwachs } \Delta \delta: \Delta \mathbf{P}_{\text{int}}^{\delta} = - \sum_{\text{El } \Omega} \mathbf{B}^T \frac{\Delta \delta}{1 - \delta^{i-1}} \boldsymbol{\sigma}^{i-1} d\Omega \quad (5.42)$$

Die Berücksichtigung neuer Bauabschnitte ergibt sich bei dieser Vorgehensweise automatisch durch Berechnung der internen und externen Knotenkräfte mit den jeweils im betrachteten Zeitschritt aktiven Elementen. Bei Anwendung nichtlinearer Stoffgesetze hängen die Spannungen und somit der Vektor \mathbf{P}_{int} nichtlinear von den Verschiebungen ab. In diesem Fall erfolgt die Lösung des Gleichungssystems mit den bekannten Verfahren iterativ [z.B. 45]. Aus den Verschiebungszuwächsen $\Delta \mathbf{u}$ können die Dehnungszuwächse $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ und aus dem Stoffgesetz die Spannungszuwächse $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ in den Elementen berechnet werden. Gesamtverschiebungen wie auch Gesamtspannungen und -dehnungen werden durch Addition der Zuwächse auf den Ausgangszustand gewonnen.

5.4.2 Beschreibung der Rißbildung

Bei einer Berechnung mit der Finite-Element-Methode haben sich zwei grundsätzliche Konzepte zur Beschreibung der Rißbildung durchgesetzt:

- Beim diskreten Rißkonzept werden Risse im Beton diskret erfaßt, d.h. durch Lösen der Knotenverbindungen entsteht entlang von Elementkanten quasi ein echter Riß. Die Rißufer bleiben über Interface-Elemente verbunden, die je nach Rißöffnungsweite z.B. die Übertragung von Zug und Schub im Riß ermöglichen.
- Beim verschmierten Rißkonzept werden Risse verschmiert über den Bereich eines Integrationspunktes in der Elementformulierung erfaßt. Es existieren unterschiedliche Varianten dieses Modells.

Eine erhebliche Schwierigkeit des diskreten Rißmodells besteht darin, das Elementnetz entsprechend den auftretenden Rißrichtungen anzupassen, was im allgemeinen Fall nur mit adaptiven Verfahren möglich ist. Aus diesem Grund hat sich das verschmierte Rißkonzept weitgehend durchgesetzt, da es erlaubt, das Tragverhalten global sehr gut wiederzugeben. Andererseits liefert das verschmierte Rißkonzept keinen Aufschluß über die lokale Versagensstelle, also insbesondere die Rißbreite. Es gibt zwar durchaus Bemühungen, aus den verschmierten Rißdehnungen Rißbreiten zurückzurechnen. Allerdings ist dieses Vorgehen, das auf halbempirischen Formeln der Rißtheorie beruht, mit gewissen Unsicherheiten belegt. Der grundsätzliche Unterschied und die Problematik der Aussage über Rißbreiten läßt sich am besten an einem Beispiel zeigen (Abb. 5-2).

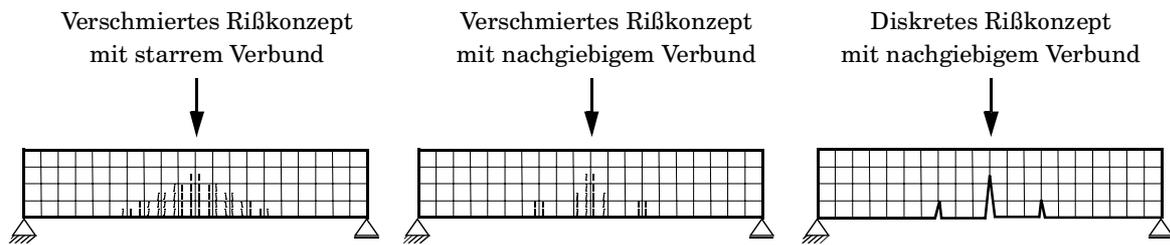


Abb. 5-2: Beispielhafte Gegenüberstellung von verschmiertem und diskretem Rißkonzept.

5.4.3 Verschmiertes Rißmodell

5.4.3.1 Modellvorstellung

Zur Klassifizierung von Rissen hat sich die Einteilung in drei Typklassen bewährt, welche die Verformung in Bezug auf die Rißebeine charakterisieren (Abb. 5-3). In dieser Arbeit sind Mode-I Risse von primärem Interesse, da sie die Wasserdurchlässigkeit bestimmen.

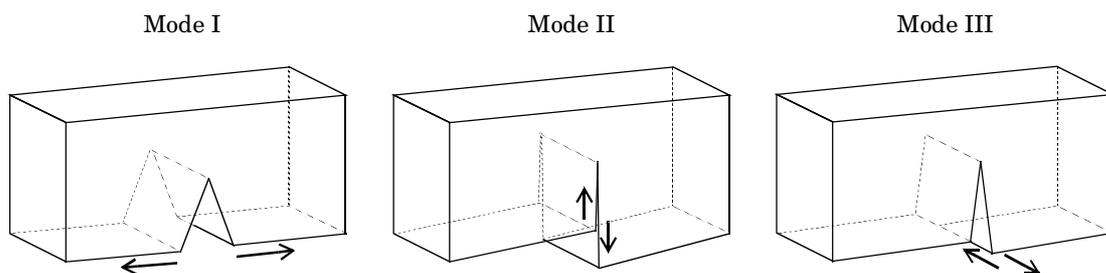


Abb. 5-3: Rißtypen [93].

Beim verschmierten Rißmodell wird ein Riß über den Bereich eines Integrationspunktes „verschmiert“. Er bildet sich senkrecht zur größten Hauptzugspannung, sobald diese die momentane Zugfestigkeit überschreitet. Die grundsätzliche Voraussetzung für die Formulierung ist die additive Zerlegung der Dehnungen (Gleichung (4.1)) unter anderem in einen Anteil $\boldsymbol{\varepsilon}^r$, der die verschmierten Rißdehnungen beschreibt. Für die vollständige Beschreibung des Elementverhaltens ist eine konstitutive Beziehung zwischen den Rißspannungen und Rißdehnungen erforderlich:

$$\boldsymbol{\sigma}^r = f(\boldsymbol{\varepsilon}^r) \quad (5.43)$$

5.4.3.2 Umsetzung bei zeitkonstanten Materialparametern

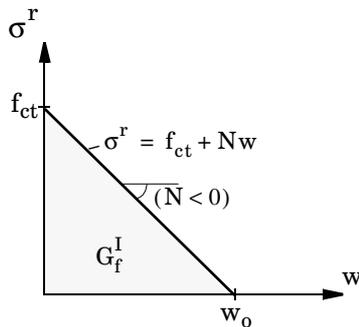
Aus der physikalisch begründeten und meßbaren Spannungs-Rißöffnungs-Beziehung muß eine Beziehung zwischen $\boldsymbol{\sigma}^r$ und der fiktiven Rißdehnung $\boldsymbol{\varepsilon}^r$ abgeleitet werden, welche auf die Länge des verschmierten Bereichs l_{eq} bezogen ist [179]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \mathbf{w}/l_{eq} \quad (5.44)$$

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung wird in Rißrichtung für die Normalspannung (Mode-I) wie auch senkrecht hierzu für die Schubspannungen (Mode-II) über die Sekantensteifigkeiten hergestellt, die auch den Entlastungspfad kennzeichnen [93]¹:

$$\begin{bmatrix} \sigma^r \\ \tau^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_s^I & 0 \\ 0 & K_s^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^r \\ \gamma^r \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

a) Spannungs-Rißöffnungs-Beziehung



b) Spannungs-Rißdehnungs-Beziehung

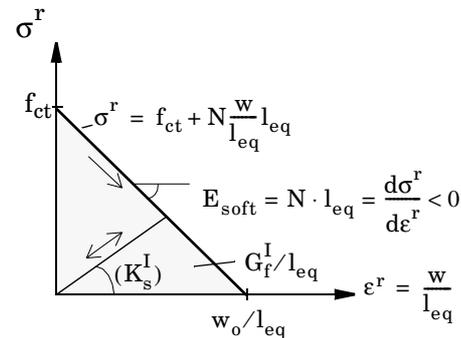


Abb. 5-4: a) Lineare Spannungs-Rißöffnungs-Beziehung. b) Lineare Spannungs-Rißdehnungs-Beziehung.

Die Steifigkeit in Rißnormalenrichtung ergibt sich entsprechend Abb. 5-4:

$$K_s^I = \sigma^r / \varepsilon^r \quad (5.46)$$

Ist β_τ der Abminderungsfaktor für die Schubsteifigkeit im Riß, so erhält man den Sekantenmodul für Schubverformungen aus

$$K_s^{II} = \frac{\beta_\tau}{(1 - \beta_\tau)2(1 + \nu)} \frac{E}{l_{eq}} \quad \text{mit } \beta_\tau \in [0;1] , \quad (5.47)$$

wobei β_τ oft in Abhängigkeit der Mode-I-Rißöffnung definiert wird, und nicht in Abhängigkeit der Schubspannung τ^r im Riß. In [241] wird z.B. folgende Beziehung angegeben:

$$\beta_\tau = \frac{1}{1 + 4447\varepsilon^r} \quad (5.48)$$

Setzt man diesen Ansatz in Gleichung (5.47) ein, so erhält man die Sekantenschubsteifigkeit in Abhängigkeit der verschmierten Rißdehnung und des Schubmoduls G:

1. Die Entlastung in der Sekante stellt einen geringfügigen Widerspruch zu Versuchsergebnissen dar, wonach der Nullspannungszustand bei einer nicht verschwindenden Rißdehnung erreicht wird. Auf eine genauere Berücksichtigung, wie z.B. von Bažant und Chern [13] vorgeschlagen, wird hier verzichtet.

$$K_s^{II} = \frac{G}{4447 \cdot \epsilon^r} \quad (5.49)$$

Hofstetter/Mang [93] geben eine Beziehung nach Dahlblom an, die umgeformt zu einer ähnlichen Formulierung führt:

$$K_s^{II} = G_s / \epsilon^r \quad \text{mit } G_s = 3,8 \text{ N/mm}^2 \quad (5.50)$$

5.4.3.3 Umsetzung bei zeitveränderlichen Materialparametern

Bei Erhärtungsphänomenen wie auch bei Schädigungsvorgängen verändert sich die Entfestigungskurve und mit ihr die für den Bruchvorgang maßgebenden Materialparameter Zugfestigkeit und Bruchenergie (vgl. Kapitel 3) [180]. Obwohl diese Veränderlichkeit bereits gut erforscht ist, zielten bisherige Forschungen fast ausschließlich auf Rißvorgänge, die zwar zu verschiedenen Hydratationsstadien auftreten, jedoch näherungsweise so rasch entfestigen, daß die Entfestigungsbeziehung während des Rißvorganges als konstant unterstellt werden kann.

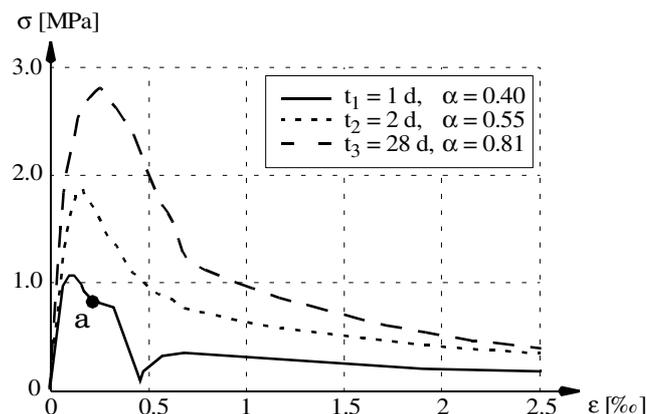


Abb. 5-5: Spannungs-Dehnungs-Beziehungen zu verschiedenen Hydratationszeitpunkten (nach Gutsch [83]).

In Abb. 5-5 sind drei Spannungs-Dehnungs-Beziehungen zu verschiedenen Hydratationszeitpunkten dargestellt. Die grundsätzliche Frage, die sich stellt, kann an einem einfachen Beispiel veranschaulicht werden: Ein Riß öffnet sich bei einem weggesteuerten Versuch zum Zeitpunkt t_1 und entfestigt sofort bis zum Punkt a (Abb. 5-5). Wie stellt sich das weitere Verhalten dar, wenn nun eine Belastungspause folgt und zum Zeitpunkt t_2 bis zum Bruch weitergedehnt wird. Überträgt man den Grundgedanken der *Solidification Theory*, nämlich die Modellvorstellung der spannungslos einzubauenen Verbindungen, auf die Erhärtung in einem Riß, so ergibt sich die wesentliche Forderung an die Umsetzung des Stoffgesetzes bei zeitveränderlichen Materialparametern:

*Allein durch ein Voranschreiten der Zeit bzw. des Hydratationsgrades
findet keine Änderung des Rißspannungs-Rißdehnungs-Zustandes statt.¹*

1. Viskose Formänderungen werden getrennt von den Rißdehnungen betrachtet und können natürlich zu Veränderungen der Rißspannungen oder Rißdehnungen führen.

Diese aus der Modellvorstellung stammende Forderung wird durch Versuche von Gutsch [83] bestätigt, der gerissene Zugproben aus jungem Beton bei konstanter Dehnung bzw. Spannung erhärten ließ, bevor sie bis zum Bruch belastet wurden. Da sich im Versuch die viskosen Dehnungsanteile nicht einfach abspalten lassen, traten in der Erhärtungsphase Kriechen oder Relaxation auf. Eine Spannungssteigerung und damit eine Anpassung an die neue Entfestigungskurve wurde jedoch erst bei einer erneuten Laststeigerung beobachtet. Zwei typische Versuchskurven sind in Abb. 5-6 wiedergegeben.

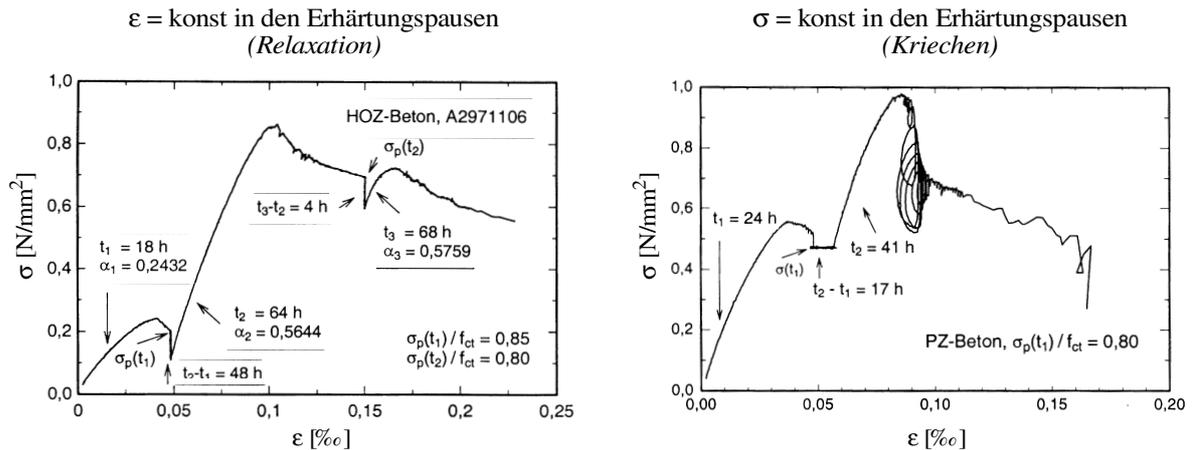


Abb. 5-6: Erhärtung im Nachrißbereich – Versuchsergebnisse nach Gutsch [83].

Für die rechnerische Umsetzung eines lang andauernden Rißvorganges, bei welchem vom ersten Öffnen des Risses bis zur völligen Entfestigung die Hydratation merklich voranschreitet, gibt es zwar einige wenige Ansätze auf Grundlage der Plastizitätstheorie [54], welche aber nach Ansicht des Autors kritisch betrachtet werden müssen, ob sie die oben erwähnte grundsätzliche Voraussetzung der Erhärtungstheorie erfüllen.

Das Stoffgesetz muß berücksichtigen, daß neue, über die Rißufer hinweg entstandene Verbindungen nur infolge einer äußeren Spannungsänderung aktiv werden. Dies ist z. B. durch eine hypoelastische Formulierung der Spannungsrate möglich:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^I & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Die Steifigkeit für die Normalspannungen ergibt sich aus folgender Überlegung: Solange der Rißspannungs-Rißdehnungs-Zustand innerhalb der neuen Entfestigungskurve liegt, kann der Riß weitere elastische Spannungen aufnehmen und somit erneut belastet werden. Dies erfolgt mit der momentanen Steifigkeit. Wird bei der Belastung die aktuelle Entfestigungsbeziehung erreicht, gibt diese den weiteren Pfad vor (Abb. 5-7). Werden die Rißdehnungen getrennt betrachtet, ergibt sich ein Spannungssprung in der Entfestigungsbeziehung.

Die Versuchsergebnisse von Gutsch decken nur einen kleinen Bereich der Entfestigungsbeziehung ab. Untersucht wurden nur Erhärtungspausen mit Rißspannungen nahe der Zugfestigkeit etwa im oberen Drittel der Entfestigungskurve. In diesem Bereich scheint der Riß durch die Erhärtung

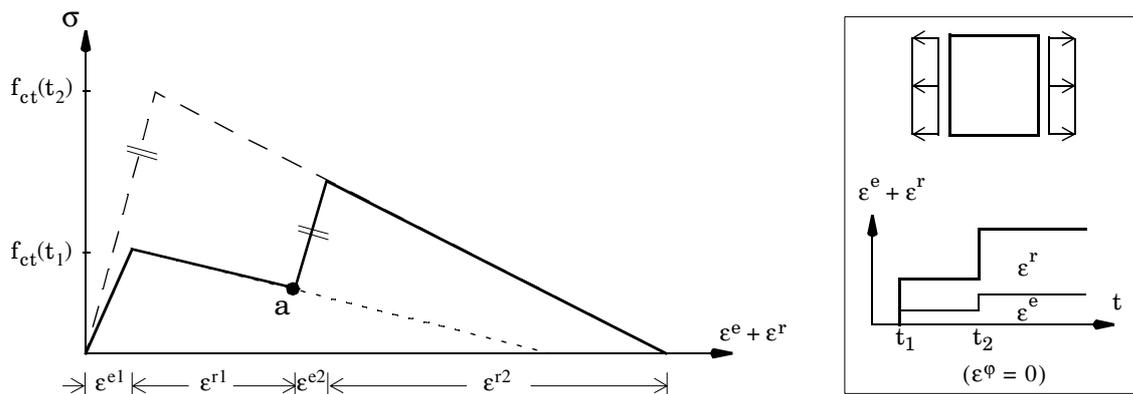


Abb. 5-7: Vorschlag bei zeitabhängiger Entfestigung (ohne viskose Dehnungsanteile).

nahezu vollständig zu heilen. Es ist aber anzunehmen, daß bereits stärker entfestigte Risse in einem geringeren Maße von der Hydratation profitieren. Ebenso sind bisher Hydratationsgrade über 0.7 nicht untersucht worden. Auch hier ist anzunehmen, daß das Selbstheilungsverhalten bei älteren Betonen geringer ausgeprägt ist. Für diese Fälle wird nach dem obigen Vorschlag die Tragfähigkeit im Riß eventuell überschätzt. Auf diesem bisher weitgehend unerforschten Gebiet sollten sowohl seitens der Baustoffwissenschaften als auch seitens der Statik weiterführende Untersuchungen angestellt werden. Für eine grundsätzliche Klärung des Werkstoffverhaltens und seiner rechnerischen Umsetzung liegen bisher noch zu wenige Versuchsdaten vor [83].

Analoge Überlegungen können für die Schubspannungen im Riß angestellt werden. Da allerdings bereits die in den Gleichungen (5.47) und (5.49) angegebene konstitutive Beziehung sehr große Unsicherheiten birgt, kann mit ausreichender Genauigkeit die empirische Formulierung der Schubsteifigkeit nach Gleichung (5.49) beibehalten werden.

5.4.3.4 Konsequenzen des verschmierten Rißmodells für die Elementgröße

Das Beispiel eines Zugstabes in Abb. 5-8 zeigt, daß schon bei der Bestimmung einer Spannungs-Rißöffnungs-Beziehung eine Nebenbedingung zu beachten ist, die auch in der FE-Berechnung Konsequenzen hat. Es gilt nämlich, sowohl im Versuch als auch in der Rechnung den sogenannten *Snap-back*-Effekt zu vermeiden.

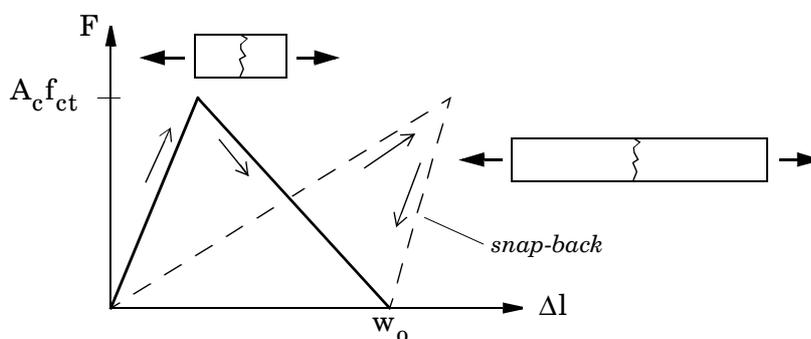


Abb. 5-8: *Snap-back*-Effekt bei langen Zugproben.

Ist der Probenstab sehr lang, so übertrifft die Entlastung der beiden elastischen Stabhälften die Verformung im Riß. Es kommt zum sogenannten *Snap-back*. Deshalb darf ein Zugstab zur weggesteuerten Bestimmung des Rißverhaltens eine bestimmte Länge nicht überschreiten. Analoge Überlegungen führen zu Restriktionen bezüglich des FE-Netzes. Um ein unerwünschtes *Snap-back*-Verhalten in der Überlagerung von elastischen und rißbedingten Dehnungen im Integrationspunkt zu vermeiden, müssen folgende Bedingungen eingehalten werden (vgl. Abb. 5-4):

$$\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{E}_{\text{soft}} < 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\sigma^r}{d\varepsilon^r} + \mathbf{E}_c \geq 0 \quad (5.52)$$

Daraus läßt sich eine größte äquivalente Länge l_{eq} angeben:

$$l_{\text{eq}} < \frac{\mathbf{E}_c}{|\mathbf{N}_{\text{max}}|} = \lambda \quad (5.53)$$

Typische Werte für λ liegen nach Ottosen zwischen 0.4 m und 0.8 m [93]. Dieser Wertebereich bestätigt sich, wenn man in die folgende Beziehung, die für die lineare Entfestigungskurve gilt, übliche Werte des erhärteten Betons einsetzt:

$$\lambda = \frac{2G_f \cdot \mathbf{E}_c}{(f_{\text{ct}})^2} > l_{\text{eq}} \quad (5.54)$$

In Abb. 5-9 ist die Entwicklung von λ für den Fall der linearen *Tension-Softening*-Beziehung nach Gleichung (5.54) über dem Hydratationsgrad aufgetragen. Die Entwicklung von \mathbf{E}_c und f_{ct} wurde entsprechend den Vorschlägen von Onken und Rostásy [155] (vgl. Abb. 3-6), die Bruchenergieentwicklung gemäß dem Vorschlag in Abschnitt 3.4.3 affin zur Steifigkeitsentwicklung angesetzt. Man erhält somit:

$$l_{\text{eq}} < \lambda(\alpha) = \frac{2G_{f,\infty} \cdot \mathbf{E}_{c,\infty}}{(f_{\text{ct},\infty})^2} \cdot \frac{\alpha - \alpha_0}{1 - \alpha_0}^{-2/3} = \lambda_\infty \frac{\alpha - \alpha_0}{1 - \alpha_0}^{-2/3} \quad (5.55)$$

Maßgebend für die Elementgröße ist demnach der erhärtete Beton. Wie aus dem Kurvenverlauf in Abb. 5-9 ersichtlich, kommt man zu demselben Schluß, wenn man für die Entwicklung der Bruchenergie den Ansatz nach MC 90 verwendet (vgl. Abschnitt 3.4.3).

Die äquivalente Länge ist nach Rots [179] eine Größe, die von der Elementgeometrie und der Ansatzordnung abhängt. Als Faustregel sollte die größte Elementkantenlänge auf $\lambda/\sqrt{2}$ bei linearen Verschiebungsansätzen und auf λ bei quadratischen Verschiebungsansätzen begrenzt werden. Kann das Netz im Einzelfall nicht an diese Bedingung angepaßt werden, so ist entweder die Bruchenergie zu erhöhen oder die Zugfestigkeit bei gleichbleibender Bruchenergie zu vermindern, um eine stabile Berechnung zu ermöglichen. Beides führt zu einem duktileren aber auch zu einem weniger realistischen Rißverhalten.

Kommen komplizierte Entfestigungskurven zur Anwendung, die den tatsächlichen Verlauf genauer beschreiben (Abb. 3-4), werden die Anforderungen an die Elementgröße strenger, da das entfestigende Verhalten stärker ausgeprägt ist. So erfordert z.B. die nichtlineare Kurve nach Hordijk [95] eine Beschränkung auf etwa ein Drittel der oben genannten Werte. Neben der Einfachheit und

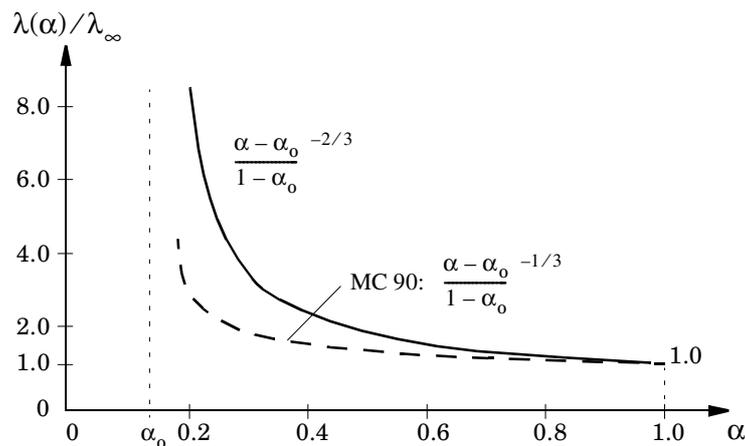


Abb. 5-9: Veränderlichkeit der Nebenbedingung für $l_{eq} > \lambda$ mit dem Hydratationsgrad.

der Beschränkung auf zwei Materialparameter (f_{ct} und G_f) spricht somit auch die numerische Robustheit für den Ansatz einer linearen Entfestigungsbeziehung.

5.4.4 Diskretes Rißmodell

5.4.4.1 Modellvorstellung und Anwendung

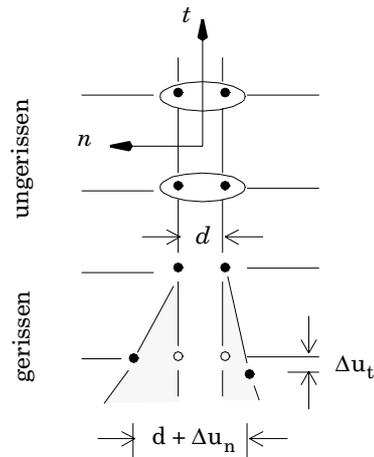
Die Anwendung diskreter Rißmodelle wurde erstmals von Ngo und Scordelis im Jahre 1967 beschrieben [148, 221]. Hillerborg et al. [89] stellten 1976 das *fictitious crack model* vor, wonach eine Zone mit Mikrorissen zu einem einzigen fiktiven Makroriß zusammengefaßt wird [221]. Erst mit voranschreitender Rißbildung entsteht innerhalb dieser Zone ein einzelner dominierender Riß, der dazu führt, daß die Spannung stark abfällt und sich die Mikrorisse teilweise wieder schließen.

Diskrete Rißmodelle können vorteilhaft eingesetzt werden, wenn entweder sowohl Ort als auch Richtung eines Risses von vornherein bekannt sind, oder wenn das FE-Netz adaptiv an den Rißfortschritt angepaßt wird. Besonders geeignet sind sie für schwach bewehrte, also insbesondere für mindestbewehrte Bauteile, da sich in diesem Fall wenige breite Risse bilden. Der Hauptvorteil diskreter Rißmodelle liegt in der direkten Ablesbarkeit der Rißbreite und deren Verlauf über den Querschnitt.

In Finite-Element-Berechnungen werden diskrete Risse mit sogenannten Riß- oder *Interface-Elementen* modelliert, welche in Scheibenstrukturen Linienelemente, in räumlichen Strukturen Flächenelemente mit korrespondierenden Knoten für jedes Rißufer darstellen. Sie verhalten sich quasi starr bei Druck und bis zum Erreichen des Rißkriteriums auch auf Zug. Nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit wird das Verhalten durch eine Spannungs-Rißöffnungs-Beziehung bestimmt, wobei sich ein Riß durch Entlastung auch wieder schließen kann. Die Schubsteifigkeit im Riß ist im ungerissenen Zustand quasi starr, im gerissenen Zustand je nach Formulierung um einen konstanten oder von der Rißöffnung abhängigen Faktor abgemindert.

5.4.4.2 Umsetzung

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf linienförmige *Interface-Elemente* in Scheibenstrukturen, können jedoch sinngemäß auch auf flächenförmige Rißelemente in räumlichen Strukturen angewendet werden.

Abb. 5-10: Diskretes Riß-Element (*Interface-Element*).

Das Interface-Element, das in seiner Ansatzordnung an die verwendeten Scheibenelemente anzupassen ist, kann Spannungen σ_n normal und Schubspannungen τ_t tangential zur Rißrichtung übertragen. Der Zusammenhang zwischen den Spannungsänderungen $\dot{\sigma}$ und den Änderungen der Relativverschiebungen $\Delta \dot{\mathbf{u}}$ lautet :

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_n \\ \dot{\tau}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_\sigma & 0 \\ 0 & K_\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \dot{u}_n \\ \Delta \dot{u}_t \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Im ungerissenen Zustand sind die Steifigkeiten K_σ und K_τ mit großen Penalty-Werten zu belegen. Nach dem Reißen wird das Elementverhalten in Normalenrichtung durch die Spannungs-Rißöffnungs-Beziehung $\sigma_n(\Delta u_n)$ bestimmt. Daraus ergibt sich die Steifigkeit im gerissenen Zustand (vgl. Abschnitt 5.4.3.2):

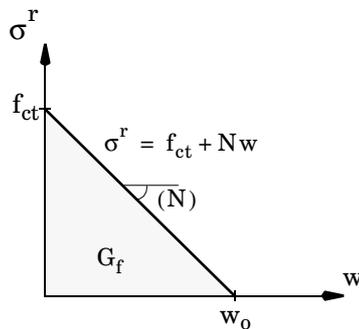
$$K_\sigma^r = \frac{\partial \sigma_n(\Delta u_n)}{\partial \Delta u_n} \quad (5.57)$$

Die Schubsteifigkeit im gerissenen Zustand wird in der Regel abgemindert oder auf Null gesetzt. Für die Spannungs-Rißöffnungs-Beziehung der Interface-Elemente gilt das in Abschnitt 5.4.3 Gesagte. Die Ansatzordnung der Rißelemente sollte auf die verwendeten Betonelemente abgestimmt sein. Bei 8-Knoten-Scheibenelementen werden also sechsknotige Interface-Elemente mit quadratischen Verschiebungsansätzen, bei 4-Knoten-Scheibenelementen vierknotige Interface-Elemente mit linearen Verschiebungsansätzen verwendet.

5.4.4.3 Riß-Elemente in der Symmetrieachse

Werden Rißelemente in der Symmetrieachse angeordnet, und wird nur das halbe System abgebildet, dann ist zu beachten, daß die Spannungs-Rißöffnungs-Beziehung anzupassen ist, indem die Bruchenergie halbiert wird, da nur die halbe Rißbreite bei gleicher Spannung auftritt.

a) Spannungs-Rißöffnungs-Beziehung



b) Spannungs-Rißöffnungs-Beziehung in der Symmetrieachse bei halben Systemen

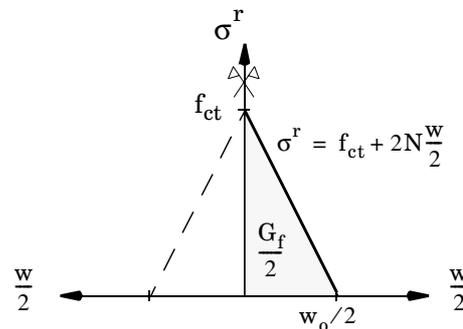


Abb. 5-11: Spannungs-Rißöffnungs-Beziehung für Interface-Elemente in der Symmetrieachse.

5.4.5 Modellierung der Bewehrung

5.4.5.1 Modellvorstellungen

Bis zum ersten Riß spielt die Bewehrung eine untergeordnete Rolle für das Tragverhalten einer Stahlbetonkonstruktion, die sich nur in einer geringfügigen Vergrößerung der elastischen Steifigkeit bemerkbar macht. Deshalb können durch Bewehrung keine Risse vermieden, sondern nur Rißbreiten begrenzt werden. Um diesen rißbreitenbeschränkenden Effekt in der FE-Berechnung zu berücksichtigen, sind verschiedene Bewehrungsmodelle vorgeschlagen worden, über die hier ein kurzer Überblick gegeben werden soll.

Ähnlich wie bei den Rißmodellen unterscheidet man zwischen verschmierten und diskreten Bewehrungsmodellen. Verschmierte Modelle werden z.B. für gleichförmig verteilte Betonstahlbewehrung eingesetzt. Die Wirkung der Bewehrung wird in den Betonelementen verschmiert über die Elementabmessung oder einzelne Integrationspunkte meist orthotrop beschrieben.

Die diskrete Abbildung einzelner Bewehrungsstränge ist dann angebracht, wenn die Wirkung einer Bewehrungskonzentration erfaßt werden soll. In diesem Fall wird die Bewehrung durch Fachwerkstäbe oder Balkenelemente modelliert, was bedeutet, daß die Knoten entsprechend dem Bewehrungsverlauf auszurichten sind. Neuere Entwicklungen, wie die Methode der eingebetteten Bewehrung (*embedded reinforcement*), ermöglichen es, auch einzelne Bewehrungsstränge in den Betonelementen zu erfassen [93, 162].

5.4.5.2 Tension-Stiffening-Effekt

Unter dem Begriff *Tension-Stiffening* versteht man den Effekt, daß sich der Beton zwischen den Rissen auf Zug an der Lastabtragung beteiligt. Es kommt zu einer Erhöhung der mittleren Steifigkeit gegenüber dem reinen Zustand II, die aber deutlich unter der ungerissenen Steifigkeit liegt. Wird im FE-Modell ein starrer Verbund zwischen Bewehrung und Betonelementen angenommen, ist dieser Effekt zu berücksichtigen, um die Steifigkeit des Systems richtig zu erfassen. Möglich ist eine Anpassung des Betonstoffgesetzes in Form einer modifizierten *Tension-Softening*-Kurve, eine Anpassung der Stahlkennlinie oder eine Berücksichtigung als eigener Steifigkeitsanteil [69, 162].

5.4.5.3 Verbund zwischen Bewehrung und Beton

In der Umgebung der Risse tritt ein Schlupf zwischen den Bewehrungsstäben und dem umgebenden Beton auf. Sehr viele Stahlbeton-FE-Modelle arbeiten mit einem starren Verbund, d.h. die Verformungen an den Knoten von Beton und Stahl sind identisch. Wird das *Tension-Stiffening* korrekt erfaßt, liefert dieses Vorgehen brauchbare Ergebnisse für das globale Tragverhalten. Soll jedoch eine Aussage über die Rißbreite gemacht werden, ist es notwendig, das lokale Verhalten in Form des nachgiebigen Verbundes möglichst realitätsnah zu beschreiben. Dazu müssen geeignete Verbundgesetze [134, 149] formuliert sowie die Bewehrungselemente über Doppelknoten an die Betonelemente nachgiebig gekoppelt werden.

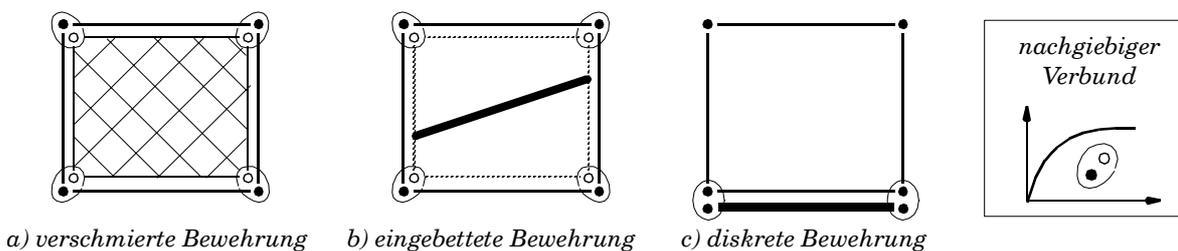


Abb. 5-12: Verschiedene Bewehrungsmodelle mit Erfassung des nachgiebigen Verbundes.

Die einfachste Form des nachgiebigen Verbundes ist eine ideal elastische Kopplung. Realitätsnähere Beschreibungen münden in nichtlinearen Funktionen, da die Krafteinleitung Plastifizierungen und Mikrorisse im Bereich der Kontaktzone verursacht. In Kapitel 6 wird ein Modell vorgestellt, mit dem diese Nachgiebigkeit diskret im Riß erfaßt werden kann.

5.4.5.4 Modellierung der Bewehrung in einem diskreten Riß

Grundsätzlich kann die Bewehrung, die das Interface-Element kreuzt, verschmiert, eingebettet oder diskret abgebildet werden. Bei der verschmierten und eingebetteten Variante wird die Bewehrungssteifigkeit in das Element integriert, wobei die Nachgiebigkeit des Verbundes intern erfaßt werden muß. Werden das diskrete Rißmodell und das diskrete Bewehrungsmodell kombiniert, so ist der Fall zu untersuchen, bei dem der Bewehrungsstab das Rißelement kreuzt.

Da eine Formulierung mit starrem Verbund hier zu stark unterschätzten Rißbreiten führen würde, ist eine Berücksichtigung der Nachgiebigkeit unerlässlich. Herkömmlicherweise wird dies über eine in Längsrichtung der Bewehrung verschiebliche Kopplung der Stabknoten an die Knoten der Betonelemente erfaßt. Im folgenden Kapitel soll erläutert werden, wie die Nachgiebigkeit des Verbundes auch berücksichtigt werden kann, wenn die Wirkung der Bewehrung im Riß durch nichtlineare Federelemente simuliert wird. Man erreicht somit ein einfaches Modell, das sich sehr gut an Normenregelungen anpassen läßt.

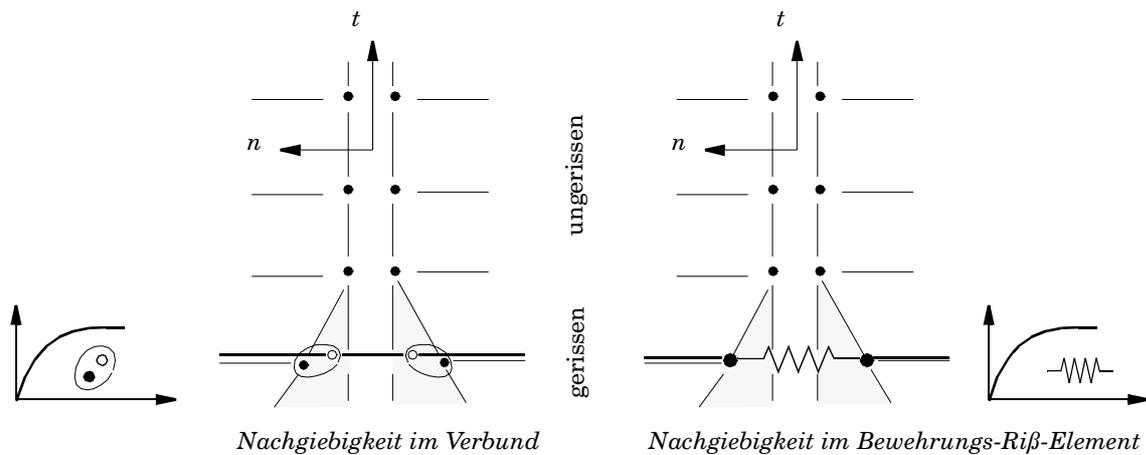


Abb. 5-13: Kombination von diskreter Bewehrung mit diskretem Rißmodell.

5.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Berechnung von Temperatur-, Hydratationsgrad- und Verschiebungsfeldern mit der Finite-Element-Methode dargestellt. Ausgehend von einem Überblick über die physikalischen Zusammenhänge werden verschiedene Grade der Kopplung zwischen Temperatur- und Verschiebungsberechnung definiert. Grundsätzlich sind alle Kopplungsgrade geeignet, um frühe Temperaturspannungen im jungen Beton zu erfassen, allerdings ist einerseits die volle Kopplung (Kopplungsgrad *A*) nicht erforderlich, und andererseits eine sehr starke Vereinfachung (Kopplungsgrad *D*) eventuell zu ungenau. Deshalb wird in dieser Arbeit das einseitig gekoppelte Verfahren mit Hydratationsgradberechnung (Kopplungsgrad *B*) favorisiert und später in den Beispielrechnungen verwendet. Die bekannten Verfahren zur Berechnung instationärer Temperaturfelder werden für die Berechnung hydratisierenden Betons angepaßt. Bei der Berechnung von Verschiebungen und Spannungen bereitet vor allem die Veränderlichkeit der bruchmechanischen Materialparameter Schwierigkeiten. Teilweise – z.B. im Nachrißbereich – fehlen noch Versuchsergebnisse und geeignete Modelle, um das tatsächliche Verhalten abbilden zu können.

Kapitel 6

Normenorientiertes Rißmodell für den Nachweis der Rißbreite

6.1 Allgemeines

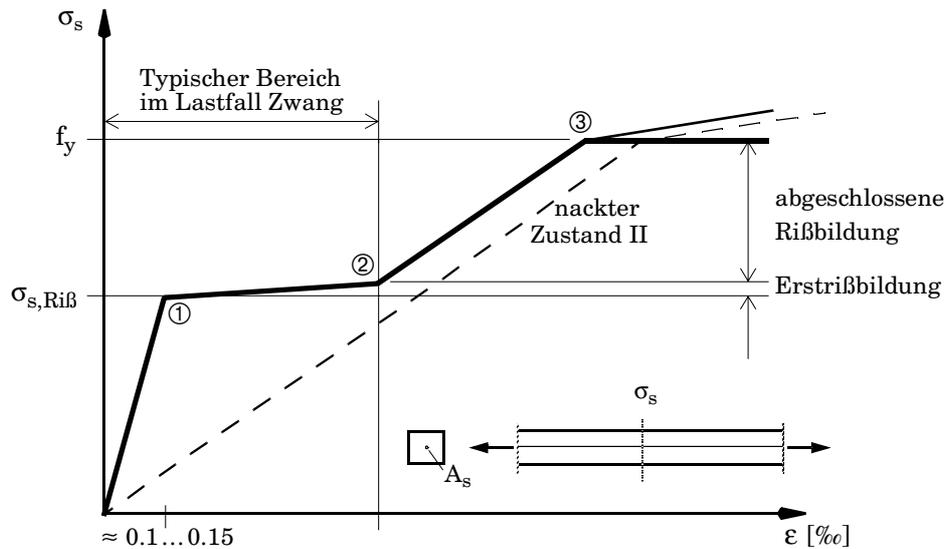
Werden komplizierte nichtlineare FE-Modelle für Bemessungszwecke angewandt, so stellt sich die Frage, inwieweit die Ergebnisse mit den Normen und deren Nachweisphilosophien übereinstimmen. Verwendet man z.B. für den nachgiebigen Verbund zwischen Beton und Bewehrung Gesetze, die aus Versuchen im Rahmen von Forschungsarbeiten abgeleitet wurden, so ist die Übertragbarkeit auf andere Bauteile und die Einarbeitung einer Sicherheitsphilosophie im allgemeinen schwierig, wohingegen bei Normenregelungen eine allgemeine Anwendbarkeit für Standardfälle unterstellt werden muß. Aufgrund dieser Überlegungen wird im folgenden aus der aktuellen Normenregelung für die Rißbreitenbeschränkung ein diskretes Rißmodell für die FEM entwickelt, das sicherstellt, daß die Stahlspannung im Riß und die Rißbreite auf Höhe der Bewehrung stets in dem durch die Norm festgelegten Zusammenhang stehen. Der Grundgedanke dieses Modells wurde von Schikora entwickelt und bereits erfolgreich beim Nachweis einer bauteilangepaßten Regelung für die Mindestbewehrung im Tunnelbau eingesetzt [182, 183].

6.2 Grundlagen zur Beschränkung der Rißbreite

6.2.1 Grundgedanken der Rißtheorie

Sowohl die derzeitig noch geltende DIN 1045 (1988 [51]) wie auch der EC2 beinhalten Regelungen zur Beschränkung der Rißbreite, die auf denselben Grundlagen basieren. Diese wurden von Schießl et al. [185-190] aus den Grundgedanken der richtungsweisenden Arbeit von Rehm und Martin [166] entwickelt. Im allgemeinen wird zwischen Erstrißbildung und abgeschlossener Rißbildung unterschieden. Aus Abb. 6-1, die den vereinfachten Zusammenhang zwischen Stahlspannung σ_s und mittlerer Dehnung ε eines Stahlbetonquerschnittes zeigt, kann man erkennen, daß es sich bei der Erstrißbildung quasi um ein Fließplateau auf Gebrauchsniveau handelt.

Der Unterschied zwischen Erstrißbildung und abgeschlossener Rißbildung besteht darin, daß bei der Erstrißbildung zwischen den Rissen Bereiche existieren, in denen Stahldehnung und Betondehnung gleich groß sind (reiner Zustand I). In den Bereichen, in denen die Stahldehnung ε_s größer als die Betondehnung ε_c in Höhe des Stahls ist, besteht zwischen Bewehrung und Beton kein starrer

Abb. 6-1: Vereinfachte σ_s - ϵ -Linie eines Stahlbetonzugstabes [187].

sondern ein nachgiebiger Verbund. Ohne diese Differenzverschiebungen wäre die Rißbreite auf Höhe der Bewehrung gleich Null.

Auf einer gewissen Strecke kann von der Bewehrung praktisch keine Kraft auf den Beton übertragen werden, da der Verbund komplett gestört ist. Die Größe dieses Bereiches, die eigentlich abhängig von der Betondeckung ist, wird jedoch im allgemeinen mit $k_0 = 50$ mm angenommen [187]¹. Nach dieser Strecke trägt der Stahl seine Kraft über Verbundspannungen in den Beton ein, so daß der Beton zwischen den Rissen auf Zug mitwirkt.

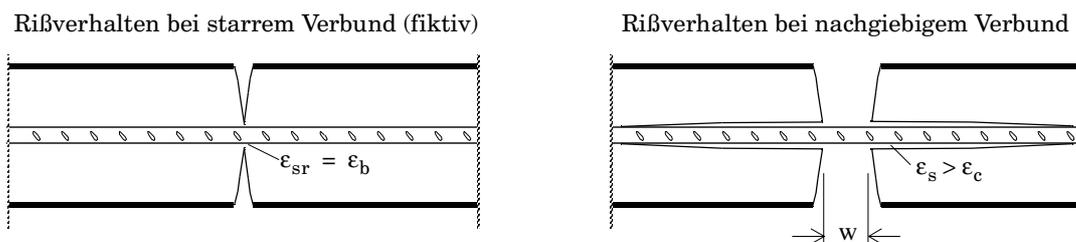


Abb. 6-2: Rißverhalten bei starrem und nachgiebigem Verbund.

Aus Abb. 6-2 wird klar, daß eine realistische Berechnung von Rißbreiten das Verbundverhalten berücksichtigen muß. Es besteht die Möglichkeit, dies mit Verbundelementen zwischen Beton und Stahl zu realisieren [134], bzw. bei der verschmierten Bewehrung die Nachgiebigkeit in den Knoten zu berücksichtigen (vgl. Abb. 5-12). In der Praxis eingesetzte Programme erlauben bei der verschmierten Bewehrung jedoch meist nur einen starren Verbund zwischen Stahl und Beton. Die Be-

1. In der Regelung nach dem Model Code 90 [43] und dem Entwurf zur DIN 1045-1 [52] wird k_0 nicht in Ansatz gebracht (vgl. Anhang D.1).

rücksichtigung des sogenannten Tension-Stiffening-Effektes ergibt zwar mit diesen Elementen die richtige Steifigkeit des Verbundwerkstoffes Stahlbeton, Aussagen über die Rißbreite sind rückwirkend jedoch nur indirekt möglich. Verbundelemente zwischen Beton und Bewehrung sind in der Regel zu aufwendig in der Eingabe. Als Alternative kann, wie in diesem Kapitel erläutert, das Verbundverhalten integral im Riß berücksichtigt werden. Die Rißbreite w entspricht dem aufintegrierten Dehnungsunterschied zwischen Beton und Stahl (Abb. 6-3):

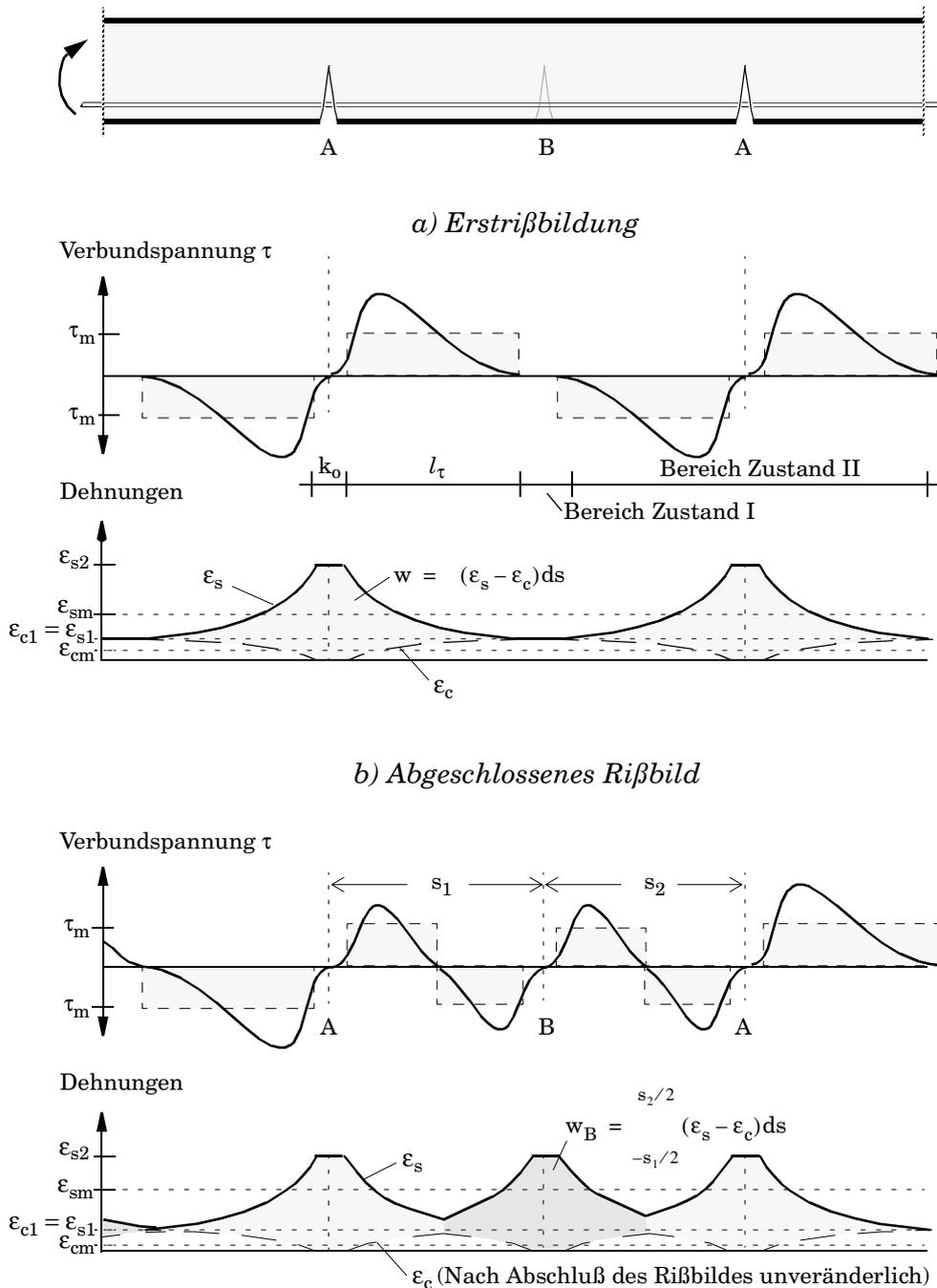


Abb. 6-3: Dehnungen und Verbundspannungen entlang des Bewehrungsstabes bei a) noch nicht abgeschlossener Rißbildung, b) abgeschlossener Rißbildung.

$$w = \int_{-s_1/2}^{s_2/2} (\epsilon_s - \epsilon_c) ds = \frac{s_1 + s_2}{2} (\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}) \quad (6.1)$$

Im Gegensatz zu Temperaturdehnungen, die Beton und Stahl bei Annahme ähnlicher Temperaturdehnzahlen in etwa gleich betreffen und damit direkt nicht rißwirksam sind, müssen bei den Betondehnungen gegebenenfalls Schwindeinflüsse berücksichtigt werden. Oftmals wird der Einfluß der Betondehnungen vernachlässigt oder empirisch mit den Stahldehnungen erfaßt, so daß sich die mittlere Rißbreite aus dem mittleren Rißabstand s_{rm} folgendermaßen ergibt:

$$w_m = s_{rm} \cdot (\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}) \cong s_{rm} \cdot \epsilon_{sm} \quad (6.2)$$

In Heft 425 [189] wird für die mittlere Stahldehnung unabhängig davon, ob Erstriß oder abgeschlossenes Rißbild, folgende Gleichung angegeben:

$$\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} \cong \epsilon_{sm} = \frac{\sigma_{s2}}{E_s} \left(1 - \beta_1 \beta_2 \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2 \geq 0,4 \frac{\sigma_{s2}}{E_s} \quad (6.3)$$

Die Stahlspannung im Riß nach Zustand II σ_{s2} ist bei reiner oder überwiegender Zwangbeanspruchung nicht größer als die Stahlspannung im Riß nach Zustand II unter der Rißschnittgröße σ_{sr} (vgl. Abb. 6-1). Sie kann ebenso wie die Rißbreite vorhandener Risse durch den bei fortschreitender Rißbildung stattfindenden Zwangabbau sogar kleiner werden (vgl. Abb. 7-4 auf Seite 129). Mit $\beta_1 = 1$ für Rippenstähle und $\beta_2 = 0.5$ für langandauernde Belastung ergibt sich:

$$\epsilon_{sm} = 0,5 \frac{\sigma_s}{E_s} = 0,5 \epsilon_{s2} \quad (6.4)$$

Diese Beziehung wird auch in Heft 400 [187] für reine Zwangbeanspruchung angegeben und befindet sich in guter Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen, wobei davon auszugehen ist, daß der Einfluß der Betondehnungen in der Stahldehnung enthalten ist.

Der Rißabstand s_r wird aus dem Grundgedanken berechnet, daß die Rißschnittgröße über Verbundspannungen von Riß A ausgehend in den Beton übertragen werden muß, damit ein Riß B entstehen kann. In Abb. 6-4 ist dies am Beispiel eines zentrisch gezogenen Stabes verdeutlicht.

Um die Stahlspannung $\Delta\sigma_s$ in den Beton einzuleiten, muß die Kraft $\Delta\sigma_s \cdot A_s$ durch Verbundspannungen übertragen werden. Da die Größe der übertragbaren Verbundspannung im wesentlichen von der Betonzugfestigkeit abhängt, kann die mittlere, über die Einleitungslänge verschmierte Größe τ_m vereinfacht in Abhängigkeit von f_{ctm} angegeben werden [187], wobei unterstellt wird, daß dieser Zusammenhang auch für jungen Beton gültig ist:

$$\tau_m = 1,25 \cdot f_{ctm} \quad (6.5)$$

Damit ergibt sich die Einleitungslänge l_τ in Abhängigkeit des Bewehrungsumfanges U_s :

$$l_\tau = \frac{\Delta\sigma_s A_s}{\tau_m U_s} = \frac{4 \Delta\sigma_s A_s}{5 f_{ctm} U_s} \quad (6.6)$$

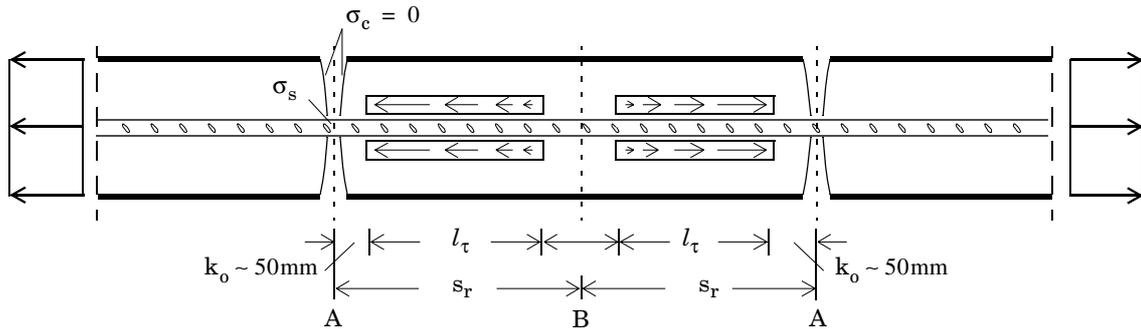


Abb. 6-4: Krafteinleitung von der Bewehrung in den Beton über Verbundspannungen.

Mit dem Umfang von n Bewehrungsstäben $U_s = n\varnothing_s\pi$ und der zugehörigen Stahlfläche $A_s = n\varnothing_s^2\pi/4$ erhält man die Strecke s_r , die nötig ist, um die Stahlspannung $\Delta\sigma_s$ von einem bestehende Riß aus in den Beton einzuleiten:

$$s_r = k_o + l_\tau = k_o + 0,2 \cdot \frac{\Delta\sigma_s}{f_{ctm}} \varnothing_s \quad (6.7)$$

$\Delta\sigma_s$ ist der Unterschied zwischen der Stahlspannung im Riß und der Stahlspannung σ_{s1} im ungerissenen Beton in einem Schnitt mit der Entfernung s_r vom Riß. Diese Überlegung ist zunächst unabhängig von der Entstehung eines weiteren Risses und gibt lediglich die Strecke an, welche bei mittlerer Zugfestigkeit nötig ist, um die Kraft $\Delta\sigma_s \cdot A_s$ in den Beton einzuleiten. Geht man davon aus, daß diese Kraft gerade die Rißschnittgröße ist, so entsteht in B ein weiterer Riß, und es gilt mit dem geometrischen Bewehrungsgrad $\rho = A_s / A_c$:

$$\sigma_s A_s = f_{ctm} A_c + \sigma_{sr1} A_s \quad \Delta\sigma_s = \sigma_s - \sigma_{sr1} = \frac{f_{ctm}}{\rho} \quad (6.8)$$

Darin ist σ_{sr1} die Spannung im Stahl im Zustand I bei Erreichen der Betonzugfestigkeit, die sich aus der Dehnungsgleichheit vor dem Riß bestimmen läßt:

$$\frac{\sigma_{sr1}}{E_s} = \frac{f_{ctm}}{E_c} \quad (6.9)$$

Damit ist die Stahlspannung im Rißquerschnitt:

$$\sigma_s = \frac{f_{ctm}}{\rho} + \frac{E_s}{E_c} f_{ctm} \quad (6.10)$$

In diesem Fall stellt s_r den Abstand zwischen den Rissen A und B dar:

$$s_r = k_o + 0,2 \cdot \frac{\varnothing_s}{\rho} \quad (6.11)$$

Die gebräuchliche, in Heft 400 [187] angegebene Formel für den Rißabstand ergibt sich nun aus Gleichung (6.4) in Verbindung mit Gleichung (6.11):

$$w_m = 0,5 \frac{\sigma_s}{E_s} k_o + 0,2 \frac{\sigma_s}{\rho} k_c \quad (6.12)$$

Der neu eingeführte Faktor k_c berücksichtigt dabei die Völligkeit der Zugspannungen im Zustand I. Bei zentrischem Zug ist $k_c = 1.0$ zu setzen, bei reiner Biegung $k_c = 0.5$, wobei sich ρ auf die effektive Zugzone des Betons bezieht. Im weiteren wird, soweit nichts anderes angegeben, von Bauteilen unter zentrischem Zug infolge Zwang ausgegangen.

6.2.2 Mechanismus der Rißbildung: Maximaler und minimaler Rißabstand

Aus der oben angegebenen Ableitung kann gefolgert werden, daß s_r nach Gleichung (6.11) der minimale Rißabstand bei mittlerer Betonzugfestigkeit ist, da mindestens eine Länge von $2 \cdot s_r$ benötigt wird, um die Rißschnittgröße von beiden Seiten einzuleiten.

Im Verlauf der Erstrißbildung wird der Rißabstand solange verkleinert, bis entweder alle vorhandenen Rißabstände kleiner als $2 \cdot s_r$ sind („abgeschlossenes Rißbild“), oder aber die Rißbildung stoppt, weil die Rißursache insbesondere bei Zwang nicht mehr ausreicht, um neue Risse hervorzurufen ($\sigma_s \cdot A_s < A_{c,eff} \cdot f_{ctm}$). Somit ist also s_r nach Gleichung (6.11) der minimale Rißabstand. Bei abgeschlossenem Rißbild ist $2 \cdot s_r$ der maximale und für die Rißbreite ungünstigste Rißabstand.

Bei reiner Zwangbeanspruchung wird das abgeschlossene Rißbild in der Regel nicht erreicht, da die Rißbildung der Rißursache entgegenwirkt und den Zwang abbaut. Aus diesem Grund kann es vorkommen, daß Risse durch Entstehen eines weiteren Risses in unmittelbarer Nachbarschaft ihre Rißbreite vermindern. Entsprechend verringert sich die Stahlspannung im Riß (vgl. Abb. 7-4, Seite 129). Für die Berechnung der Rißbreite ist im Bereich der Erstrißbildung die sogenannte Einleitungslänge l_τ maßgebend (Abb. 6-3). Bei der Erstrißbildung kann jeder Rißabstand oberhalb eines Grenzwertes s_r auftreten, der sich analog zu den Überlegungen nach Abb. 6-4 bzw. Gleichung (6.11) ergibt. Die Rißbreite wird im Punkt A aufgrund des oben geschilderten Phänomens bei Zwangbeanspruchung maximal, wenn in B gerade noch kein Riß entstehen konnte. Somit ergibt sich die Rißbreite:

$$w = \int_{-(k_o + l_\tau)}^{(k_o + l_\tau)} (\epsilon_s - \epsilon_c) ds = 2(k_o + l_\tau)(\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}) \quad (6.13)$$

Tritt in B ein Riß auf, wird der Zwang etwas abgebaut, und die Verhältnisse liegen günstiger. Steigt die Zwangbeanspruchung weiter an, und beeinflussen sich die Risse A und B noch nicht, so kann ein weiterer Riß C dazwischen entstehen. Reicht der Abstand zwischen A und B jedoch nicht mehr aus, um die Rißschnittgröße in den Beton einzuleiten, so ist dort das Rißbild abgeschlossen. Möglicherweise tritt dies auch im Stadium der Erstrißbildung auf, wenn zwei Risse zufällig sehr nahe beieinander entstanden sind. Der Rißabstand ist dann:

$$s_r = a \cdot 2(k_o + l_\tau) = a \cdot s_{r, \max} \quad \text{mit } 0,5 \leq a \leq 1 \quad (6.14)$$

Für die analytische Aufbereitung innerhalb eines Stoffgesetzes muß nun eine Annahme zur Berechnung der Rißbreite getroffen werden. Die *rißwirksame Länge*, auf welcher der Verbund gestört ist, wird durch Annahme eines festen Faktors a im Stoffgesetz im Sinne eines mittleren Rißabstandes festgelegt. Im Model Code 90 [43] wird $a = 2/3$ empfohlen; es sind jedoch für Grenzbetrachtungen auch andere Werte denkbar. Gleichung (6.11) wird somit ersetzt durch folgende Beziehung:

$$s_{rm} = \frac{4}{3} k_o + 0,2 \cdot \frac{\varnothing_s}{\rho} \quad (6.15)$$

Das Rißmodell, welches in Abschnitt 6.3 abgeleitet wird, geht von Gleichung (6.7) aus. In das Modell fließt nicht der Rißabstand sondern die rißwirksame Länge ein. Diese kann maximal $2(k_o + l_\tau)$ sein, minimal auch bei der Erstrißbildung $(k_o + l_\tau)$. Der Wert für mittlere Verhältnisse hängt vom Stadium der Rißbildung ab. In Anlehnung an Model Code 90 könnte mit $a = 2/3$ gerechnet werden. Um jedoch konform mit den Normenregelungen zu bleiben, wird entsprechend Heft 400 [187] und Heft 425 [189] mit $a = 0.5$ gearbeitet, was insbesondere auch durch die Übereinstimmung dieses Ansatzes mit Versuchsergebnissen gerechtfertigt ist [187].

6.2.3 Besonderheiten bei jungem Beton

Insbesondere die Erstrißbildung bei Zwangbeanspruchung findet in der Regel in den ersten Tagen bzw. Wochen nach dem Betonieren statt. Für das Rißverhalten von jungem Beton wird in der Regel dasselbe grundlegende Verhalten angenommen, wie es oben geschildert wurde. Als einziger hydrationsabhängiger Materialparameter wird die aktuelle Betonzugfestigkeit zum Rißzeitpunkt angesetzt. Diese spielt allerdings in Gleichung (6.12) keine Rolle, da das Verhältnis f_{ctm} / τ_m auch bei jungem Beton für Rippenstähle mit 0.8 angenommen werden kann [187].

Für den mittleren Rißabstand oder die im folgenden Abschnitt abzuleitenden Gesetzmäßigkeiten ist jedoch die absolute Größe der aktuellen Betonzugfestigkeit von Bedeutung. Gegenüber der recht pauschalen Regelung nach DIN 1045 [51], bei früher Rißbildung die halbe Zugfestigkeit des erhärteten Betons anzusetzen, stellte Heft 400 [187] zeitabhängige Faktoren zur genaueren Berücksichtigung der Festigkeitsentwicklung zur Verfügung (siehe Abschnitt 3.4.2.2).

In Heft 400 [187] und Heft 425 [189] wird die rechnerische Zugfestigkeit mit einem Faktor k_E abhängig von der Bauteildicke abgemindert, der die Wirkung von unberücksichtigten Eigenspannungen erfassen soll. Dies ist neben dem Einfluß langandauernder Lasten und der Frage des „richtigen“ Fraktilwertes ein weiterer Faktor, welcher die Unsicherheit in Bezug auf die wirksame Bauwerkszugfestigkeit zeigt (vgl. Abschnitt 3.4.2.2). Für das im folgenden Abschnitt abzuleitende Stoffgesetz wird die mittlere Betonzugfestigkeit nach 28 Tagen als Rechenwert für die wirksame Betonzugfestigkeit nach Abschluß der Hydratation angesetzt, und der zeitliche Verlauf nach Gleichung (3.25) berücksichtigt. Dieses Vorgehen beinhaltet zum einen Abminderungen aufgrund der Lastdauer und von Eigenspannungen, welche kompensiert werden durch die Festigkeitssteigerung über 28 Tage hinaus, sowie den Ansatz eines für die Rißbreite ungünstigeren Wertes oberhalb des Mittelwertes.

$$f_{ctw, \alpha = 1} = (1,0 \dots 1,5) \cdot (0,6 \dots 0,8) \cdot (0,7 \dots 0,9) \cdot (1,2 \dots 1,4) \cdot f_{ctm, 28d} \approx f_{ctm, 28d} \quad (6.16)$$

| | | | |
|-----------------------|----------------------------|------------------------------|--------------------------------|
| oberer Fraktilwert | Eigenspan- nungen k_E | Abminderung bei Dauerlast | Steigerung bis $\alpha = 1$ |
|-----------------------|----------------------------|------------------------------|--------------------------------|

Für das Nachrißverhalten ergibt sich wiederum eine ähnliche Problematik, wie sie in Abschnitt 5.4.3.3 geschildert wurde. Für den Zusammenhang zwischen Stahlspannung und Rißöffnung, der im folgenden Abschnitt abzuleiten ist, wird die Betonzugfestigkeit zum Zeitpunkt der Rißentstehung eingesetzt und für den jeweiligen Riß konstant gehalten.

6.3 Stoffgesetz für ein diskretes Bewehrungs-Riß-Element

6.3.1 Grundgedanken

Die Motivation für das diskrete Rißmodell besteht darin, mit den weithin verfügbaren Elementen für vollen Verbund zwischen Beton und Stahl zu arbeiten, d.h. die jeweiligen Elemente an den Knoten starr zu koppeln. Die Wirkung des nachgiebigen Verbundes, dessen Berücksichtigung für eine realistische Modellierung der Rißbreite unerlässlich ist, wird dabei integral im Riß mittels eines speziellen Elementes erfaßt. Dieses Element kann durch ein nichtlineares eindimensionales Stoffgesetz vergleichbar einer nichtlinearen Federsteifigkeit beschrieben werden.

Um die Krafteinleitung in den Beton in der Umgebung des Risses näherungsweise zu erfassen, verbindet das Bewehrungselement die Rißufer nicht direkt, sondern wird um ein Maß nach hinten versetzt im Beton verankert, das sich am Wert k_0 für den gestörten Verbund orientiert. Gegenüber einer Modellierung mit Verbundelementen kann der Spannungszustand in der unmittelbaren Rißumgebung nur näherungsweise erfaßt werden (vgl. Abschnitt 6.4).

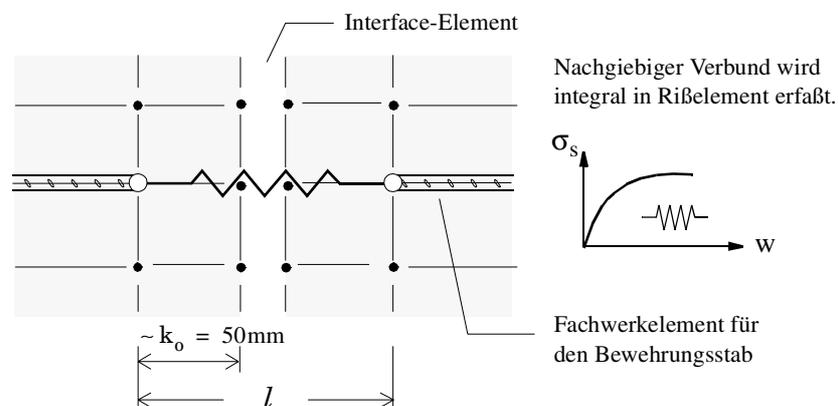


Abb. 6-5: Kombination von diskreter Bewehrung mit diskretem Rißmodell.

6.3.2 Ableitung der konstitutiven Beziehung

Die konstitutiven Gleichungen für das Bewehrungs-Riß-Element (im folgenden kurz BRE) müssen abschnittsweise definiert werden, um das Zusammenwirken von Beton und Stahl zu modellieren. Ab dem Zeitpunkt der Rißentstehung berücksichtigt es die Nachgiebigkeit des Verbundes zwischen Stahl und Beton auf einer Länge $(s_{rm} - l)/2$ beidseits des Risses. Die tangentielle Steifigkeit in Abhängigkeit der Elementdehnung ist in Abb. 6-6 mit der Einteilung in die Abschnitte dargestellt.

Der auf den ersten Blick ungewöhnliche Verlauf ist das Resultat der Unstetigkeiten in der Spannungs-Rißöffnungs-Beziehung des Betons sowie in der Arbeitslinie des Bewehrungsstahls.

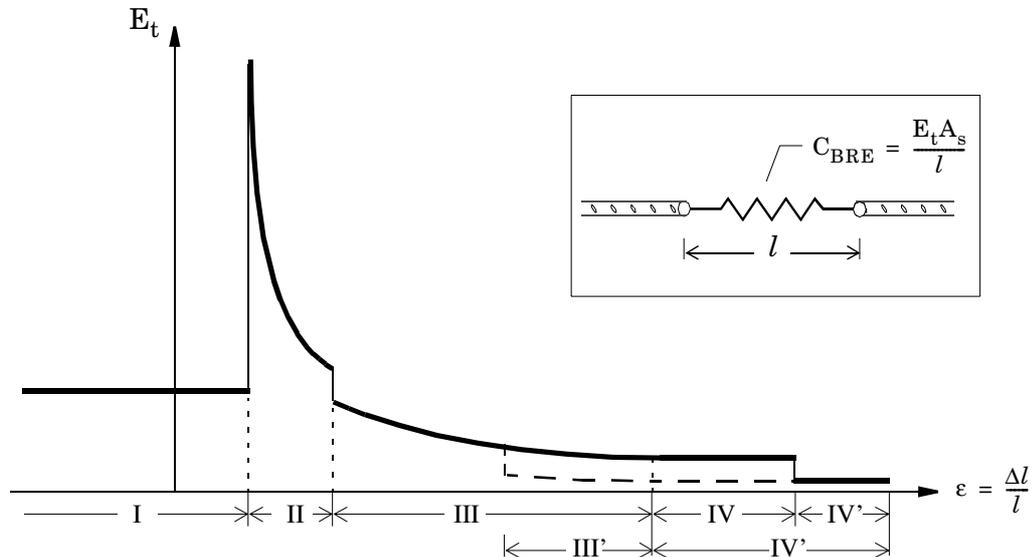


Abb. 6-6: Steifigkeit des diskreten Bewehrungs-Riß-Elementes (BRE) in Abhängigkeit der Elementdehnung.

Bereich I: Ungerissener Bereich

Im Druckbereich sowie bei Zugdehnungen kleiner als die Betonbruchdehnung

$$\varepsilon^I \leq \varepsilon_{ct} = \frac{f_{ctm}}{E_c} \quad (6.17)$$

wird der Verbund zwischen Stahl und Beton als starr angenommen. Da das Interface-Element die Betonelemente starr verbindet, muß im BRE nur die Steifigkeit des reinen Stahlzugstabs der Länge l berücksichtigt werden:

$$E_t^I = E_s \quad C_{BRE}^I = \frac{E_s A_s}{l} \quad (6.18)$$

Werden die mechanischen Parameter in der Umgebung des Risses nicht hydrationsabhängig erfaßt, so kann für die Zugbruchdehnung ε_{ct} von Beton näherungsweise ein konstanter Wert von 0.1 ‰ angenommen werden.

Bereich II: Abfallender Ast im Spannungs-Rißöffnungs-Diagramm

Der zweite Dehnungsbereich erstreckt sich von der Rißöffnung bis zur gänzlichen Entfestigung des Betons im Riß. Im Bereich II werden also noch Spannungen über die Rißufer übertragen, d.h. der Beton erfährt zu beiden Seiten eine entsprechende Dehnung (siehe Abb. 6-7). Im folgenden wird von einer linearen Tension-Softening-Beziehung ausgegangen (vgl. Abschnitt 3.4.3). Die Dehnung des Elementes ergibt sich aus Abb. 6-7:

$$\varepsilon^{\text{II}} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{w + \varepsilon_c(w) \cdot l}{l} = \frac{w}{l} + \frac{f_{\text{ctm}}}{E_c} \left(1 - \frac{w}{w_0}\right) \quad \text{mit } w_0 = \frac{2G_f}{f_{\text{ctm}}} \quad (6.19)$$

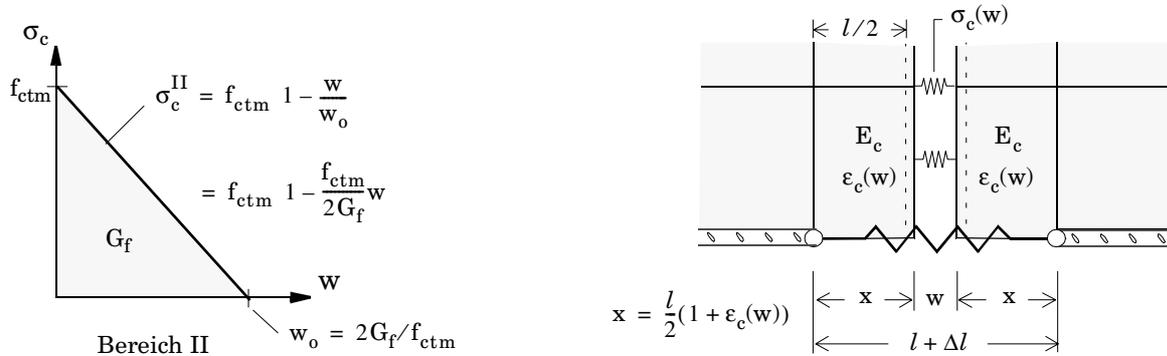


Abb. 6-7: Zusammenhang zwischen Rißöffnung, Betonspannung und Elementdehnung im Bereich II.

Durch Umformung erhält man die Rißbreite in Abhängigkeit der Elementdehnung:

$$w = \frac{\varepsilon^{\text{II}} - \varepsilon_{\text{ct}}}{\frac{1}{l} - \frac{\varepsilon_{\text{ct}}}{w_0}} = \frac{\varepsilon^{\text{II}} - \varepsilon_{\text{ct}}}{w_0 - l \cdot \varepsilon_{\text{ct}}} \cdot l \cdot w_0 \quad (6.20)$$

Aus der Bedingung $0 < w < w_0$ ergibt sich eine rechnerische Obergrenze für die Elementlänge:

$$l < \frac{w_0}{\varepsilon_{\text{ct}}} = \frac{2G_f \cdot E_c}{f_{\text{ctm}}^2} \cong \frac{2G_{f\infty} \cdot E_{c\infty}}{f_{\text{ctm}\infty}^2} \cdot \frac{\hat{\beta}_E^2(\alpha)}{\hat{\beta}_{\text{ct}}^2(\alpha)} \quad (6.21)$$

$$> 2k_0 \quad \geq 1$$

Wenn das Element wie vorgeschlagen im Abstand k_0 vom diskreten Riß verankert wird, ist diese Bedingung bei realistischen Materialparametern auch im Hydratationsstadium erfüllt.

Die Stahlspannung im Riß, die zugleich die Elementspannung darstellt, kann man als Summe aus der Spannung kurz vor dem Riß und der darauffolgenden Spannungsänderung $\Delta\sigma$ auffassen. Erstere läßt sich aus der Rißdehnung des Betons bestimmen:

$$\sigma_s = \sigma_{\text{sr1}} + \Delta\sigma = f_{\text{ctm}} \frac{E_s}{E_c} + \Delta\sigma \quad (6.22)$$

Setzt man dies zusammen mit den Gleichungen (6.4) und (6.7) in Gleichung (6.2) ein, so erhält man die Rißbreite in Abhängigkeit des Spannungszuwachses:

$$w = \frac{0,5}{E_s} (\sigma_{\text{sr1}} + \Delta\sigma) k_0 + 0,2 \frac{\Delta\sigma}{f_{\text{ctm}}} \varnothing_s \quad (6.23)$$

Um den Grenzübergang $w = 0$ für $\Delta\sigma = 0$ korrekt zu erfassen, kann in Gleichung (6.23) $\sigma_{\text{sr1}} \cong 0$ angenommen werden. Wie Vergleiche gezeigt haben, bleibt dies ohne nennenswerten Einfluß auf

die Ergebnisse, da σ_{sr1} in der Regel klein gegenüber $\Delta\sigma$ ist. Im folgenden ist jeweils die allgemeinere Form unter Berücksichtigung von σ_{sr1} angegeben. Löst man Gleichung (6.23) nach $\Delta\sigma$ auf, so erhält man den Spannungszuwachs in Abhängigkeit der Rißbreite:

$$\Delta\sigma = -\frac{k_0}{2b} - \frac{\sigma_{sr1}}{2} + \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 \sigma_{sr1}^2 - 2\sigma_{sr1} b k_0 + k_0^2 + 8b E_s w} \quad (6.24)$$

$$\text{mit } b = 0,2 \frac{\varnothing_s}{f_{ctm}} \quad \text{und} \quad \sigma_{sr1} = \frac{f_{ctm} E_s}{E_c}$$

Mit Gleichung (6.20) ergibt sich daraus die tangente Steifigkeit im Bereich II:

$$E_t^{II} = \frac{\partial \Delta\sigma}{\partial \varepsilon^{II}} = \frac{2E_s}{\sqrt{b^2 \sigma_{sr1}^2 - 2\sigma_{sr1} b k_0 + k_0^2 + 8b E_s w}} \frac{1}{\frac{1}{l} - \frac{\varepsilon_{ct}}{w_0}} \quad \text{mit} \quad w = \frac{\varepsilon^{II} - \varepsilon_{ct}}{\frac{1}{l} - \frac{\varepsilon_{ct}}{w_0}} \quad (6.25)$$

In Abb. 6-8 ist der Verlauf der Stahlspannung und der Steifigkeit in Abhängigkeit der Rißbreite dargestellt.

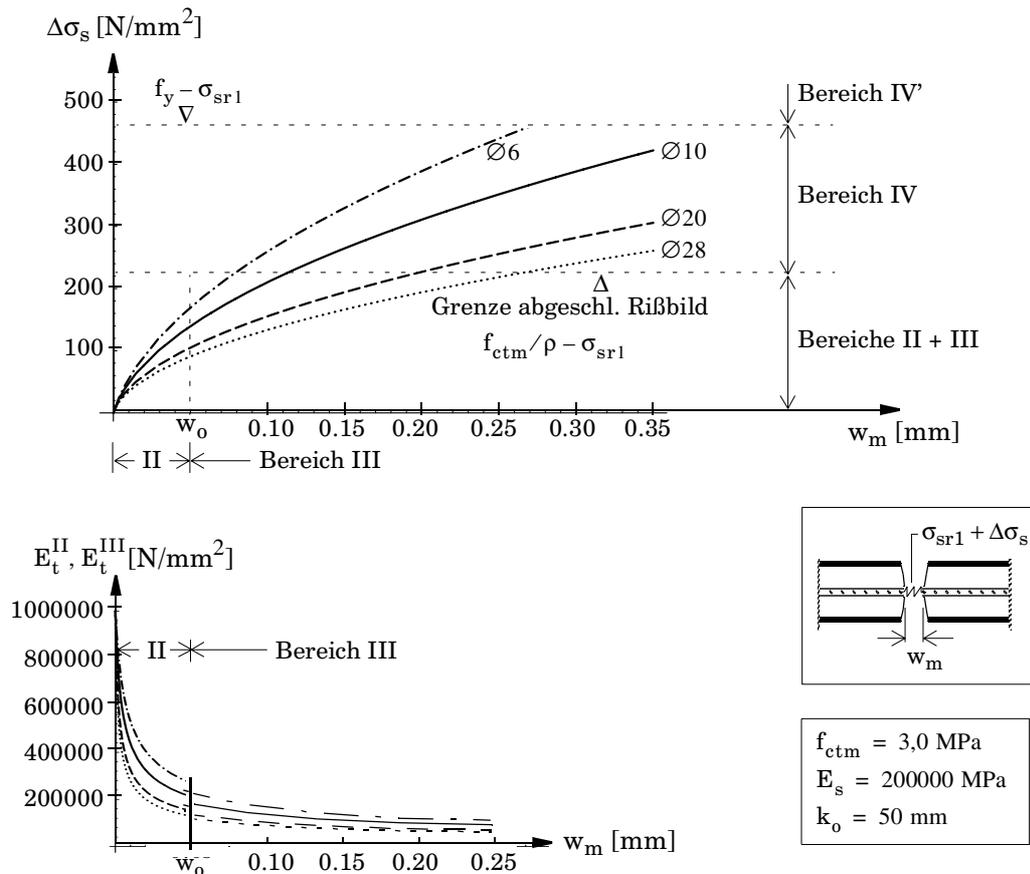


Abb. 6-8: Zusammenhang zwischen dem Zuwachs der Stahlspannung im Riß $\Delta\sigma_s$, der Elementsteifigkeit E_t und der Rißbreite w_m für die Bereiche II und III.

Die obere Grenze für den Bereich II ergibt sich aus der Rißbreite w_o , ab der keine Spannungen im Riß mehr übertragen werden:

$$\varepsilon_{ct} < \varepsilon^{II} \leq \frac{w_o}{l} \quad \text{mit} \quad w_o = \frac{2G_f}{f_{ctm}} \quad (6.26)$$

Bereich III: Von w_o bis zum Abschluß der Erstrißbildung

Der Bereich III deckt den Zustand vom Erreichen der Rißbreite w_o bis zum Abschluß der Erstrißbildung, d. h. dem abgeschlossenen Rißbild (,AR') ab:

$$\frac{w_o}{l} < \varepsilon^{III} \leq \varepsilon^{AR} \quad (6.27)$$

Der Abschluß der Erstrißbildung ist dadurch gekennzeichnet, daß eine Steigerung der Stahlzugkraft nicht zu neuen Rissen führt, weil die Rißabstände bereits kleiner als der doppelte minimale Rißabstand sind. Nach dem Model Code 90 [43] kann dieser Zustand auch durch das folgende Kriterium charakterisiert werden:

$$\sigma_s^{AR} > f_{ctm}/\rho + \sigma_{sr1} \quad \Delta\sigma > f_{ctm}/\rho \quad (6.28)$$

Da sich der Beton in der Umgebung des Risses auf der Länge l näherungsweise normal zur Rißrichtung nicht dehnt, ist die Elementdehnung im Bereich III:

$$\varepsilon^{III} = w/l \quad (6.29)$$

Die obere Grenze für den Bereich III erhält man, indem die Gleichungen (6.28) und (6.29) in Gleichung (6.23) eingesetzt werden:

$$w^{AR} = \frac{0,5}{E_s} \sigma_{sr1} + \frac{f_{ctm}}{\rho} \quad k_o + 0,2 \frac{\varnothing_s}{\rho} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon^{AR} = \frac{w^{AR}}{l} \quad (6.30)$$

Analog zum Bereich II errechnet sich die Änderung der Stahlzugspannung gegenüber dem ungerissenen Zustand und die tangentielle Steifigkeit in Abhängigkeit der Dehnung:

$$\Delta\sigma = -\frac{k_o}{2b} - \frac{\sigma_{sr1}}{2} + \frac{1}{2b} \sqrt{b^2 \sigma_{sr1}^2 - 2\sigma_{sr1} b k_o + k_o^2 + 8b E_s l \varepsilon^{III}} \quad \text{mit} \quad b = 0,2 \frac{\varnothing_s}{f_{ctm}} \quad (6.31)$$

$$E_t^{III} = \frac{\partial \Delta\sigma}{\partial \varepsilon^{III}} = \frac{2E_s l}{\sqrt{b^2 \sigma_{sr1}^2 - 2\sigma_{sr1} b k_o + k_o^2 + 8b E_s l \varepsilon^{III}}} \quad (6.32)$$

Bereich IV: Vom abgeschlossenen Rißbild bis zum Erreichen der Stahlstreckgrenze

Nach Abschluß des Rißbildes wird angenommen, daß der Beton zwischen den Rissen nicht mehr zur Steigerung der Steifigkeit beiträgt, so daß sich die Steifigkeit der Konstruktion auf die reine Stahlsteifigkeit reduziert. Im hier verwendeten Modell wird diese Steifigkeit näherungsweise im Riß

konzentriert, so daß sich in der Reihenschaltung mit der umgebenden, vergleichsweise starren Konstruktion die richtige Steifigkeit ergibt.

$$E_t^{IV} = \frac{l}{A_s s_r^{AR} \frac{1}{E_s A_s} - \frac{1}{E_s A_s + E_c A_c}} \cong \frac{E_s l}{s_r^{AR}} \quad (6.33)$$

$\ll 1 / (E_s A_s)$

Der zugehörige Rißabstand im abgeschlossenen Rißbild s_r^{AR} wird errechnet aus:

$$s_r^{AR} = k_0 + 0,2 \frac{\varnothing_s}{\rho} \quad (6.34)$$

Man nimmt also an, daß die Verbundspannungen zwischen Beton und Stahl ausgereizt sind, und Spannungszuwächse nur noch vom Stahlquerschnitt aufgenommen werden können. Die Stahlspannung folgt demnach aus:

$$\sigma_s = \sigma_s^{AR} + \Delta \varepsilon^{IV} \cdot E_t^{IV} \quad (6.35)$$

Da die Betondehnungen trotz der Spannungszuwächse konstant bleiben, und keine weiteren Rissen entstehen, sind die zusätzlichen Stahldehnungen voll rißwirksam:

$$w = \varepsilon^{AR} l + \Delta \varepsilon^{IV} s_r^{AR} \quad (6.36)$$

Erreichen der Stahlstreckgrenze

Die Bereiche III' und IV' treten jeweils an die Stelle von III und IV, wenn die Stahlstreckgrenze f_y überschritten wird. Die neueren Normen lassen prinzipiell zwei Möglichkeiten zu, um den plastischen Dehnungsbereich von Betonstahl zu berücksichtigen:

- a) Auf die Ausnutzung der Spannungsreserve bis zur Zugfestigkeit wird verzichtet und die Spannung f_y konstant gehalten. In diesem Fall sieht z. B. EC2 [65] keine Dehnungsbeschränkung vor, während in der deutschen Anwendungsrichtlinie die Stahldehnung auf $\varepsilon_{s, \text{grenz}} = 20 \text{ ‰}$ beschränkt ist.
- b) Wenn die Verfestigung bis zur Zugfestigkeit f_t ausgenutzt wird, ist die Stahldehnung zu beschränken. Nach EC2 ist die Grenze bei $\varepsilon_{st, \text{grenz}} = 10 \text{ ‰}$, nach dem Entwurf zur DIN 1045-1 [52] bei 25 ‰ ebenso wie für Fall a). Im folgenden wird von den Regelungen nach EC2 ausgegangen.

Im Fall a) ist die tangentielle Steifigkeit auf Null zu setzen und die Stahlspannung f_y konstant zu halten. Da die Verbundspannungen die Stahlspannung relativ schnell auf einen Wert unterhalb der Streckgrenze abbauen, wird vereinfachend angenommen, daß sich die einstellenden plastischen Dehnungen auf die Elementlänge l beschränken und direkt die Rißbreite vergrößern. Im folgenden wird für die Bereiche III' und IV' geschildert, wie im Fall b), also mit verfestigendem Stahl vorzugehen ist.

Bereich III': Erreichen der Stahlstreckgrenze im Erststadium

Bei sehr schwach bewehrten Bauteilen kann bereits vor dem Erreichen des abgeschlossenen Rißbildes die Streckgrenze des Bewehrungsstahls erreicht werden. Zwar wäre in diesem Fall die Mindestbewehrung nicht ausreichend, jedoch sollte das Modell in der Lage sein, den Vorgang abzubilden.

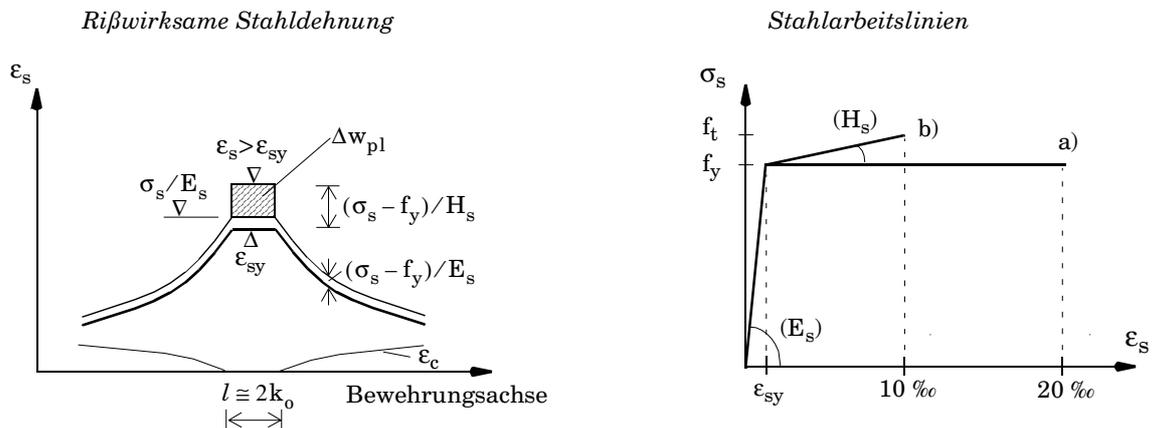


Abb. 6-9: Rißwirksame Dehnungen bei Überschreiten der Streckgrenze; Stahlarbeitslinien

In Abb. 6-9 ist dargestellt, welche rißwirksamen Dehnungen durch die Plastizität des Stahles zusätzlich entstehen. Der Anteil, der sich dadurch ergibt, daß eine größere Stahlzugkraft in den Beton eingeleitet werden muß, ist in der Rißformel per se erfaßt. Der Anteil Δw_{pl} , den die plastischen Dehnungen auf der Länge $2 \cdot k_0$ hervorrufen, ist getrennt zu betrachten.

Die Dehnung, ab welcher der Bereich III in den Bereich III' übergeht, ergibt sich aus der zugehörigen Rißbreite nach Gleichung (6.23):

$$w(f_y) = 0,5 \frac{f_y}{E_s} k_0 + 0,2 \frac{f_y}{f_{ctm}} - \frac{E_s}{E_c} \varnothing_s \quad (6.37)$$

$$\frac{w(f_y)}{l} < \varepsilon^{III'} < \varepsilon^{AR} + \frac{\Delta w_{pl}}{l} \quad (6.38)$$

Die Rißbreite im Bereich III' ergibt sich aus Gleichung (6.23) zuzüglich Δw_{pl} , welches sich in erster Näherung aus der schraffierten Fläche in Abb. 6-9 ermitteln läßt:

$$\Delta w_{pl} = l \varepsilon_s - \frac{\sigma_s}{E_s} = l(\sigma_s - f_y) \frac{1}{H_s} - \frac{1}{E_s} \quad (6.39)$$

Die länglichen Formeln für die Spannungsänderung und die Steifigkeit, die sich auf analoge Weise durch Auflösen nach $\Delta \sigma$ und Ableiten nach den Dehnungen ergeben, sind hier nicht abgedruckt. Sie werden vorteilhafterweise mit einem Computeralgebraprogramm ermittelt.

Bereich IV': Erreichen der Stahlstreckgrenze nach Abschluß des Rißbildes

Bereich IV' schließt an Bereich IV an, wenn die Stahlspannung im Riß die Streckgrenze überschreitet. Dies ist der Fall ab einer Elementdehnung von

$$\varepsilon > \varepsilon^{\text{AR}} + \frac{f_y - \sigma_s(\varepsilon^{\text{AR}})}{E_t^{\text{IV}}} \quad (6.40)$$

Wurde die Streckgrenze bereits im Bereich III überschritten, so schließt der Bereich IV' nach abgeschlossener Rißbildung unmittelbar an III' an. Die tangentielle Steifigkeit ist analog zu Bereich IV konstant:

$$E_t^{\text{IV}'} = \frac{H_s l}{s_r} \quad (6.41)$$

Der Zuwachs der Stahlspannung und der Zuwachs der Rißbreite im Bereich IV' sind dann:

$$\sigma_s = f_y + E_t^{\text{IV}'} \cdot \Delta\varepsilon^{\text{IV}'} \quad (6.42)$$

$$\Delta w^{\text{IV}'} = l(\sigma_s - f_y) \left(\frac{1}{H_s} - \frac{1}{E_s} \right) \quad (6.43)$$

Zusammenfassung der Bereiche

Zusammenfassend wird in Abb. 6-10 das Elementverhalten für verschiedene Eingangsparameter dargestellt. Zum Vergleich ist jeweils auch die entsprechende Kurve für einen Stahlstab der Länge s_r^{AR} nach Gleichung (6.34) eingezeichnet. Die Differenz beider Kurven repräsentiert den Tension-Stiffening-Effekt, also das steifere Verhalten eines Stahlbetonzugstabes gegenüber einem Stahlstab im Nachrißbereich. Man erkennt, daß der Tension-Stiffening-Effekt tatsächlich nur für schwach bewehrte Bauteile eine wesentliche Rolle spielt. Für $\rho = 2\%$ liegen die Kurven schon nahe beieinander. Außerdem ist der Einfluß des Tension-Stiffening-Effektes absolut gesehen bei großen Stabdurchmessern stärker ausgeprägt. Mit zunehmendem Stabdurchmesser nimmt bei gleichem Bewehrungsgrad zum einen der Rißabstand s_r^{AR} zu, zum anderen verringert sich aufgrund der schlechteren Verbundeigenschaften die Versteifungswirkung zwischen den Rissen. Abb. 6-10 zeigt ebenfalls den starken Einfluß des Stabdurchmessers auf das Verformungsverhalten im Riß. Bei großen Stabdurchmessern führt die relativ geringere Oberfläche zu einem größeren Schlupf zwischen Stahl und Beton, was sich direkt in einer Vergrößerung der Rißbreite und damit in einem weicherem Verhalten zeigt. Nach der vollständigen Entfestigung im Riß, also etwa ab $\Delta l > 0.1$ mm, stellen die Kurven des Bewehrungs-Riß-Elementes den direkten Zusammenhang zwischen Rißbreite $w = \Delta l$ und der Stahlspannung im Riß dar.

In Anhang D.2 ist eine vereinfachte Variante des vorgestellten Rißmodells abgeleitet, welche auch mit kommerziellen Programmen eingesetzt werden kann, die über bilineare Federelemente verfügen. Dort wird nochmals auf den Zusammenhang zwischen Bewehrungsdurchmesser, Stahlspannung im Riß und Rißbreite eingegangen.

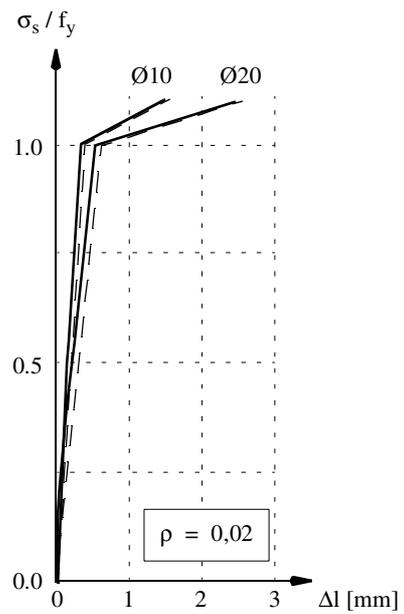
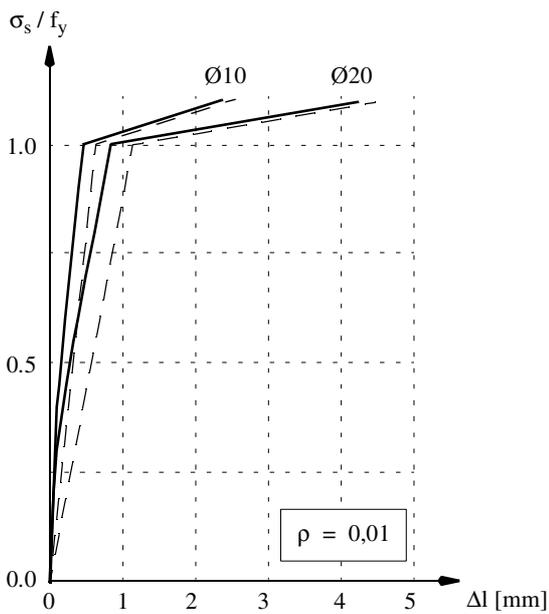
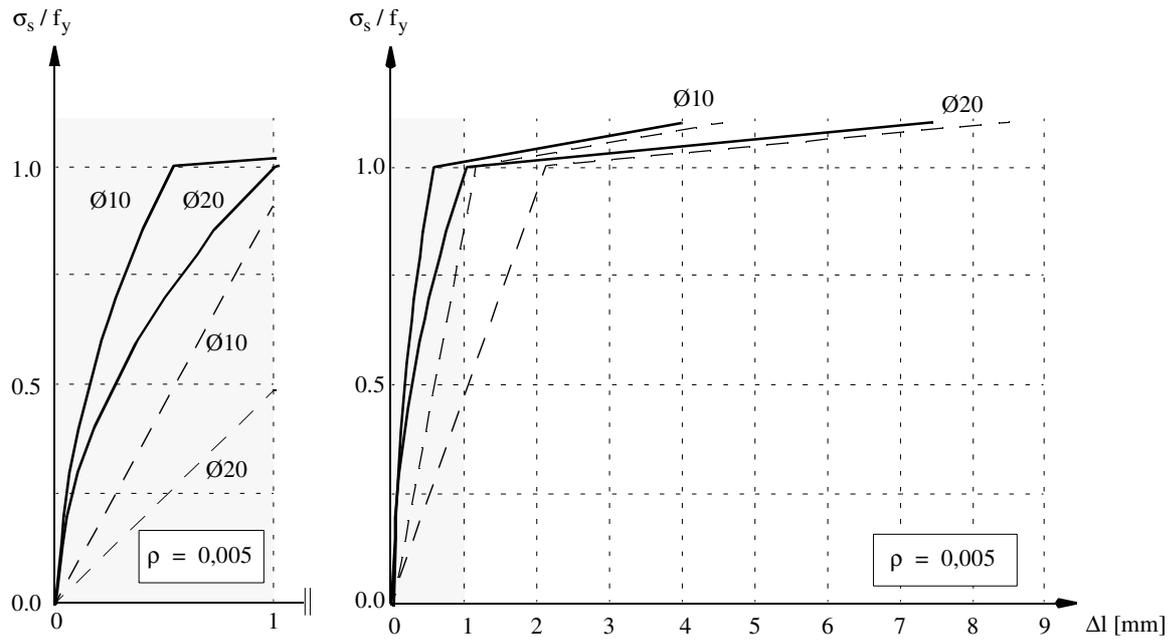
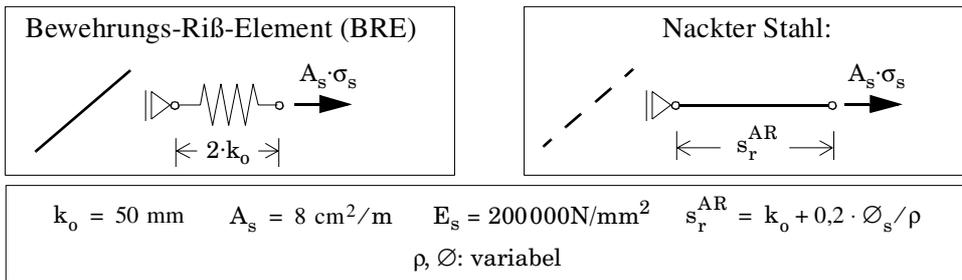


Abb. 6-10: Elementverhalten BRE im Vergleich zum nackten Stahlstab der Länge s_r^{AR} .

6.3.3 Anwendung und Wertung des Modells

Der vorgestellte Ansatz geht von den Grundlagen der Regelungen zur Rißbreitenbeschränkung nach den derzeit gültigen Normen aus, die sich in guter Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen bewährt haben. Die Anpassung an abweichende Normenkonzepte, welche auf denselben Grundlagen beruhen, wie z.B. MC 90 [43] und DIN 1045-1 [52], ist möglich (vgl. Anhang D.1). Die Nachgiebigkeit des Verbundes zwischen Beton und Stahl wird integral durch ein diskretes Bewehrungselement innerhalb eines diskreten Rißmodells abgebildet. Das Modell wurde für mittlere Verhältnisse abgeleitet und führt demzufolge auf mittlere Rißbreiten. Nicht abgebildet wird die Dübelwirkung der Bewehrung im Riß. Diese könnte durch eine entsprechende Quersteifigkeit erfaßt werden, spielt jedoch bei den betrachteten zwangbeanspruchten Bauteilen keine Rolle und wird deshalb nicht weiter behandelt.

6.3.4 Besonderheiten bei verformungsbehinderten Bauteilen

Alle genormten Regelungen zur Rißbreite gehen davon aus, daß ein neuer Riß ausschließlich durch Betonzugspannungen erzeugt wird, welche durch Bewehrung in den Beton eingeleitet werden. Betrachtet man jedoch Bauteile, bei denen z.B. durch Bodenreibung Zugspannungen in den Beton eingeleitet werden, die ebenfalls zur Rißschnittgröße beitragen, so ist genaugenommen eine Grundannahme der zugrundeliegenden Rißtheorie verletzt. Deshalb ist in diesen Fällen strenggenommen die Forderung nach einer Mindestbewehrung der Größe $\min \rho = f_{ctm}/f_y$ nicht unbedingt gerechtfertigt. Da die Schubkraft aus der kontinuierlichen Verformungsbehinderung ebenfalls einen Anteil der Rißschnittgröße in den Beton einleitet, verkürzt sich die Einleitungslänge gegenüber l_t aus Abschnitt 6.2.1. Geringere Rißabstände führen zu einem feiner verteilten Rißbild und demzufolge zu geringeren Rißbreiten.

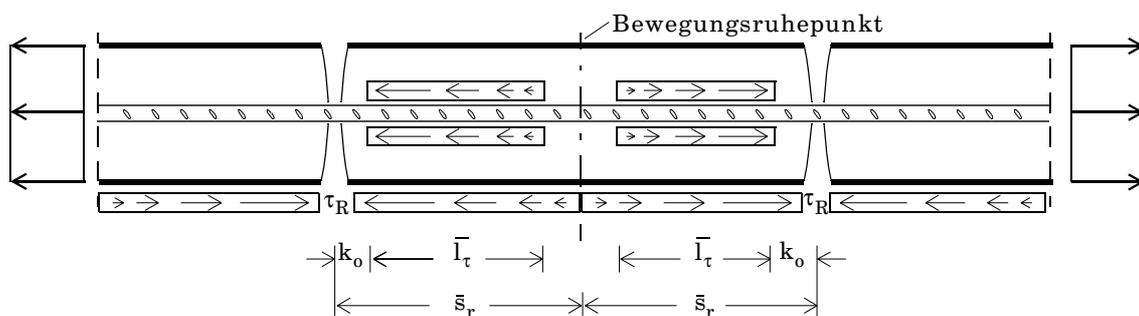


Abb. 6-11: Krafteinleitung in den Beton durch Bewehrung und Reibung.

Ein erster, näherungsweise Ansatz, um diesen bauteil- und bauwerkspezifischen Effekt in das geschilderte Rißmodell einzubauen, besteht in einer Verminderung der wirksamen Betonzugfestigkeit im Rißgesetz über einen vom Anwender anzugebenden Faktor $\xi < 1$, welcher den Anteil an der Rißschnittgröße angibt, der weiterhin über die Bewehrung zu erbringen ist. $\bar{\xi} = \xi - 1 < 1$ bedeutet demnach den Anteil an der Rißschnittgröße, der durch äußere Einflüsse wie die Bodenreibung erzeugt wird. Dieser Anteil kann geschätzt werden, indem z.B. Betonzugspannungen aus der über die Einleitungslänge integrierten Reibung ermittelt werden. Bei Bodenreibung kann die Abminderung in der Regel vernachlässigt werden, da die Reibungskräfte, die innerhalb des Rißabstandes aktiviert

werden, relativ klein sind. Der geschilderte Sachverhalt wird erst bei einer monolithischen Verbindung zu anderen massiven Bauteilen relevant, also z.B. bei Wänden auf Fundamentplatten.

6.4 Vergleich mit anderen Rißmodellen

Zum Vergleich mit anderen Rißmodellen wurde das vorgestellte Modell in das FE-Programm DIANA¹ [241] eingebaut. Als Beispiel wurde ein fiktiver weggesteuerter Zugversuch gewählt, anhand dessen sich das grundsätzliche Verhalten der Modellierungsvarianten sehr gut studieren läßt. Die qualitativen Ergebnisse lassen sich auch auf andere Probleme übertragen. Untersucht werden soll nicht nur die Kraftübertragung im Riß, die beim Elementverhalten bereits diskutiert wurde, sondern das gesamte Rißmodell, das z.B. aus Interface-Element, Bewehrungs-Riß-Element und anschließendem Beton-Bewehrungs-Verbund besteht. Dazu werden vier verschiedene Systemvarianten des in Abb. 6-12 dargestellten Systems modelliert:

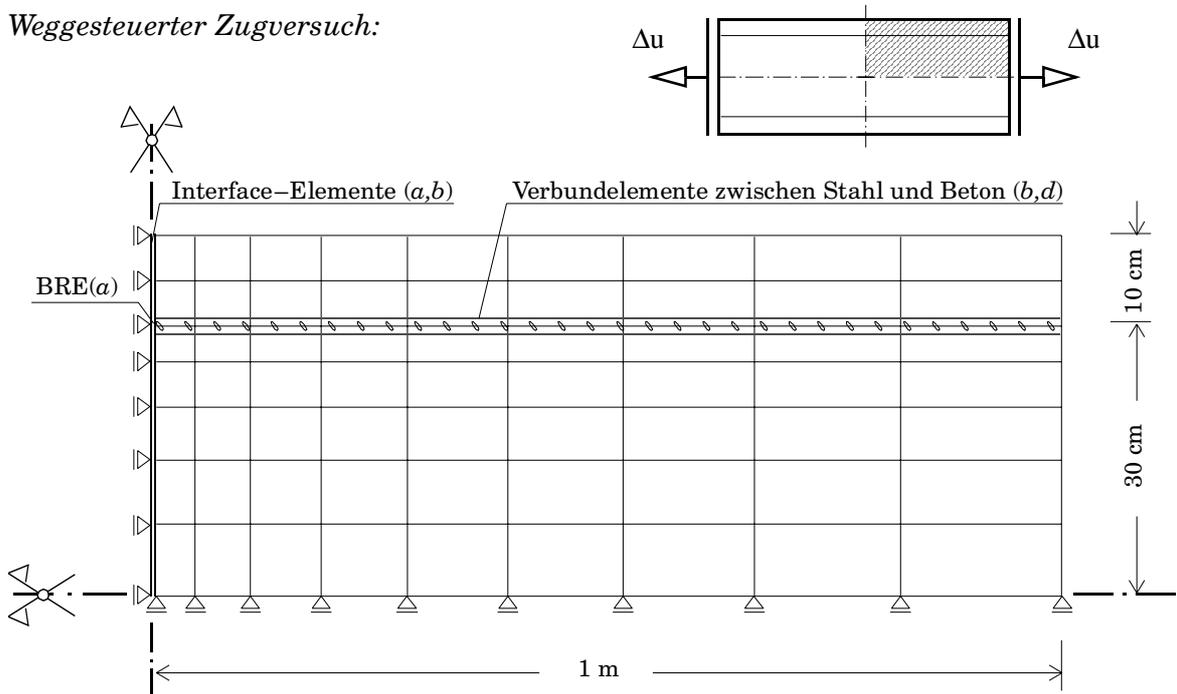
- a) Diskretes Rißmodell in Verbindung mit dem diskreten Bewehrungs-Riß-Element nach Abschnitt 6.3. Im anschließenden Bereich liegt der Stahl in Form von Stabelementen im starren Verbund. Der Beton wird im ganzen Netz linear elastisch gerechnet, da alle nichtlinearen Effekte durch das diskrete Rißmodell abgebildet werden.
- b) Diskretes Rißmodell in Verbindung mit nachgiebigem Verbund zwischen Beton und Stahl. Die Stabelemente für die Bewehrung kreuzen den diskreten Riß und sind auf ihrer ganzen Länge über Verbundelemente an die angrenzenden Betonelemente gekoppelt. Es wurde ein kubisches Verbundgesetz nach Dörr [56, 241] verwendet.
- c) Verschmiertes Rißmodell² im gesamten Netz. Die Elemente direkt an der Symmetrieachse erhalten eine etwas geringere Zugfestigkeit, um den Riß dort zu lokalisieren. Die integrierte Dehnung dieser Elemente wird als Rißbreite interpretiert.
- d) Wie c, jedoch in Verbindung mit nachgiebigem Verbund zwischen Beton und Stahl wie in b.

Vergleicht man zunächst die Entwicklung der Zwangkräfte über die Lastschritte in Abb. 6-13, so sieht man, daß das prinzipielle Verhalten von allen Modellen richtig wiedergegeben wird. Nach dem linearen Anstieg erfolgt das Überschreiten der Rißschnittgröße F_r , welche unter Berücksichtigung des Verbundquerschnittes berechnet werden muß:

$$F_r = A_c \cdot f_{ct} + A_s \cdot \sigma_{sr1} = A_c \cdot f_{ct} \left(1 + \rho_s \cdot \frac{E_s}{E_c} \right) \quad (6.44)$$

Hierauf folgt ein mehr oder weniger stark ausgeprägter Abfall der Zwangskraft, der entsteht, weil der Bewehrungsstahl zum Rißzeitpunkt eine relativ geringe Dehnung und damit Spannung aufweist. Dieser Effekt hat nur indirekt etwas mit dem nachgiebigen Verbund zwischen Beton und Stahl zu tun und tritt deshalb ebenso bei Modell c auf. Unmittelbar nach dem Riß stellt sich somit eine

-
1. Die Entwicklung von DIANA begann in den 70er Jahren an der TU Delft, Niederlande. Inzwischen beteiligen sich eine Reihe von Universitäten und Forschungseinrichtung an der Weiterentwicklung. Das Programm ist modular konzipiert und kann vom Benutzer durch FORTRAN-Routinen erweitert werden (*user-supplied-subroutines*).
 2. Genauer gesagt wird ein verschmiertes Rißmodell mit zwei festen, jedoch nicht unbedingt orthogonalen Rißrichtungen verwendet (*fixed non-orthogonal crack model*).

Weggesteuerter Zugversuch:*Rechenparameter:*

Beton: Vollständig erhärtet ($\alpha = 1$), $E_c = 35200 \text{ MPa}$, $\nu = 0.2$, $f_{ct} = 2.5 \text{ MPa}$, $G_f = 100 \text{ Nm/m}^2$, in Symm.-Achse $G_f/2$.

Bewehrung: Bewehrungsgrad $\rho_s = 1.25 \%$, Stabdurchmesser $\varnothing 25 \text{ mm}$, $E_s = 200000 \text{ MPa}$, $f_y = 500 \text{ MPa}$.

Elemente: Scheibenelemente mit vier Knoten und bilinearen Verschiebungsansätzen.

Fachwerkelemente für die Bewehrung mit zwei Knoten und linearem Verschiebungsansatz.

Interface-Elemente für diskreten Riß und für Verbund mit vier Knoten und linearen Verschiebungsansätzen.

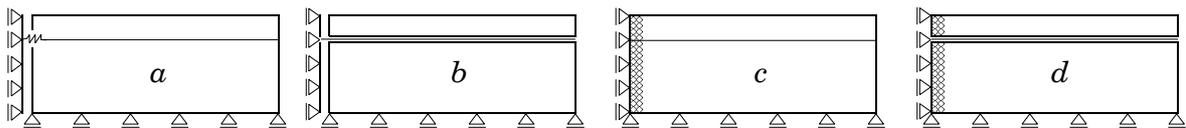
Modellierungsvarianten:

Abb. 6-12: Weggesteuerter Zugversuch: FE-System, Rechenparameter und Modellvarianten.

Zwangkraft ein, welche nur noch vom Bewehrungsstahl über die Rißufer übertragen wird und erheblich niedriger ist als vor dem Riß. Erst bei weiterer Steigerung der Zwangverformung Δu steigt auch die zugehörige Zugkraft wieder an; diesmal jedoch reagiert das Bauteil erheblich weicher als vor dem ersten Riß, allerdings auch noch wesentlich steifer als der Stahlquerschnitt allein. Die Nachrißsteifigkeit nimmt mit jedem weiteren Riß ab, bis schließlich die Steifigkeit des nackten Stahls für Lastzuwächse erreicht wird. Ein Großteil der neuen Verformung resultiert aus Dehnungen des Bewehrungsstahles im Riß in Form der Rißöffnung.

Während dieses prinzipielle Verhalten, wie gesagt, von allen Modellen erfaßt wird, gibt es quantitative Unterschiede. Das Modell *a*, bei dem die Nachgiebigkeit des Verbundes diskret im Riß abgebildet wird, zeigt den steilsten Kraftabfall unmittelbar nach dem Riß und gleichzeitig die größten

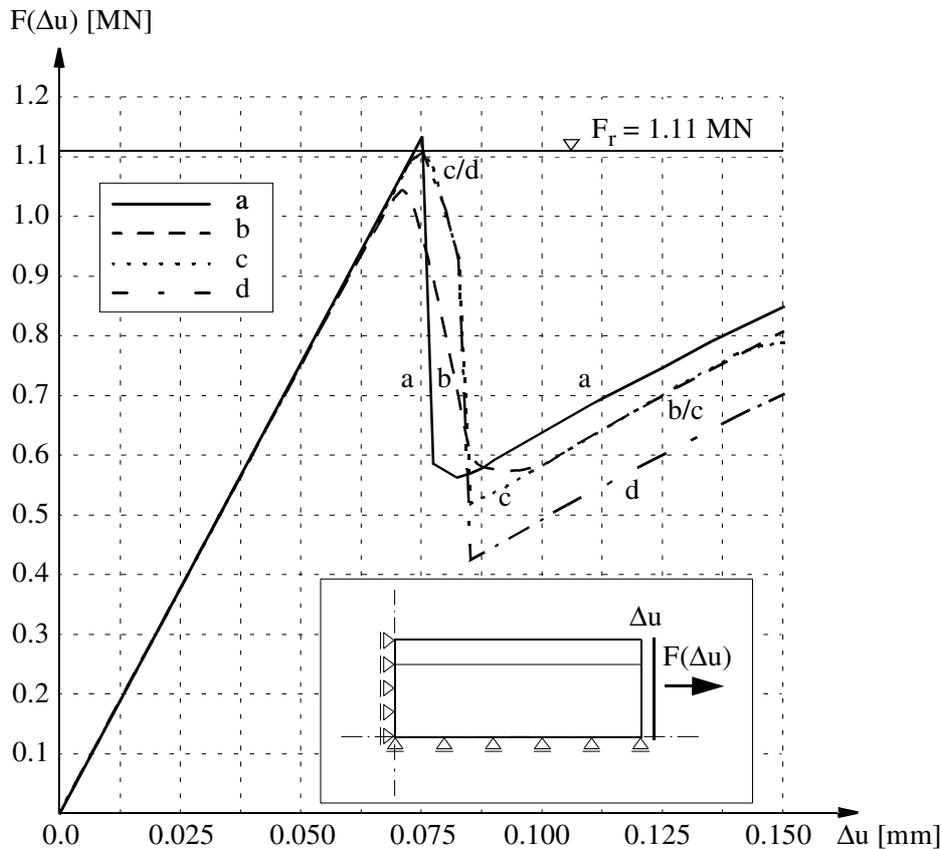


Abb. 6-13: Last-Verschiebungs-Kurve der weggesteuerten Berechnung.

Zwangkräfte im Nachrißbereich. Bei den Modellen *c* und *d* mit verschmierter Rißbildung nimmt die Zwangskraft erst etwas später jedoch fast ebenso steil ab. Der Grund liegt darin, daß infolge des zentralen Zugs alle vier Integrationspunkte jedes Elementes an der Symmetrieachse reißen. Dies führt quasi zu zwei Rissen hintereinander innerhalb einer Systemhälfte, also insgesamt zu vier Rissen. Das bedeutet, daß sich die Zwangverformung auf diese Risse aufteilt, so daß in jedem Integrationspunkt eine geringere Rißdehnung und somit eine größere Rißspannung im Tension-Softening-Diagramm errechnet wird. Die Folge ist eine künstlich erhöhte Zwangskraft, bis die Rißspannung in jedem Integrationspunkt auf Null abgefallen ist. Man könnte diesen Fehler umgehen, indem die Tension-Softening-Kurve künstlich angepaßt wird, oder indem durch eine geringfügige Einschnürung der Geometrie in der Symmetrieachse erzwungen wird, daß sich der Riß nur in einer Reihe von Integrationspunkten lokalisiert. Bei letzterem Verfahren muß jedoch ebenfalls – genauso wie für das Interface-Element in der Symmetrieachse – die Tension-Softening-Kurve modifiziert werden, um die speziellen Verhältnisse der Symmetrieachse wiederzugeben (vgl. Abb. 5-11 auf Seite 98). Die Rechenläufe *c* und *d* wurden hier bewußt mit diesem 'Fehler' wiedergegeben, um auf den beschriebenen Sachverhalt hinzuweisen.

Im Bereich der neuerlichen Kraftsteigerung verlaufen die Kurven für die Modellvarianten parallel in einem Abstand voneinander. Die größte Zwangskraft wird vom Modell *a* errechnet, die Werte für *b* und *c* sind nahezu identisch, und das Modell *d* mit verschmierter Rißbildung und nachgiebigem Verbund liefert die geringste Kraft. In diesem Bereich ist die Betonspannung im Riß abgebaut,

und die Zwangskraft entspricht der Stahlzugkraft im Riß. Alle Modelle enthalten Unsicherheiten, die das Ergebnis in diesem Bereich beeinflussen, z. B. das Verbundgesetz und dessen Eingangsparameter bei den Modellen *b* und *d*. Bei Modell *a* ist jedoch sichergestellt, daß der Zusammenhang zwischen der Rißbreite, welche zum maßgebenden Teil die Verschiebung Δu beeinflusst, und der Stahlzugkraft den genormten Regelungen entspricht.

Ein maßgeblicher Grund für die Entwicklung des diskreten Bewehrungs-Riß-Elementes war die Suche nach einer möglichst einfachen Modellierungsvariante, welche verlässliche und normkonforme Aussagen über die Rißbreite und deren Verlauf über den Querschnitt liefert. Deshalb wurden in Abb. 6-14 die errechneten Rißuferverschiebungen bei der Laststufe $\Delta u = 0.15$ mm dargestellt. Vergleicht man die Ergebnisse, so erkennt man, daß das Modell *c*, welches als einziges keine Nachgiebigkeit im Verbund zwischen Beton und Stahl berücksichtigt, die Rißbreite sowie den Rißverlauf nur unzureichend darstellen kann. Modell *b* liefert gegenüber Modell *a* etwas größere Rißbreiten, beschreibt jedoch sowohl qualitativ als auch quantitativ den Rißverlauf quasi gleichwertig wie Modell *a*. Auch Modell *d* kann noch als geeignet eingestuft werden, jedoch weist der Verlauf ohne diskretes Rißmodell relativ große Knicke auf.

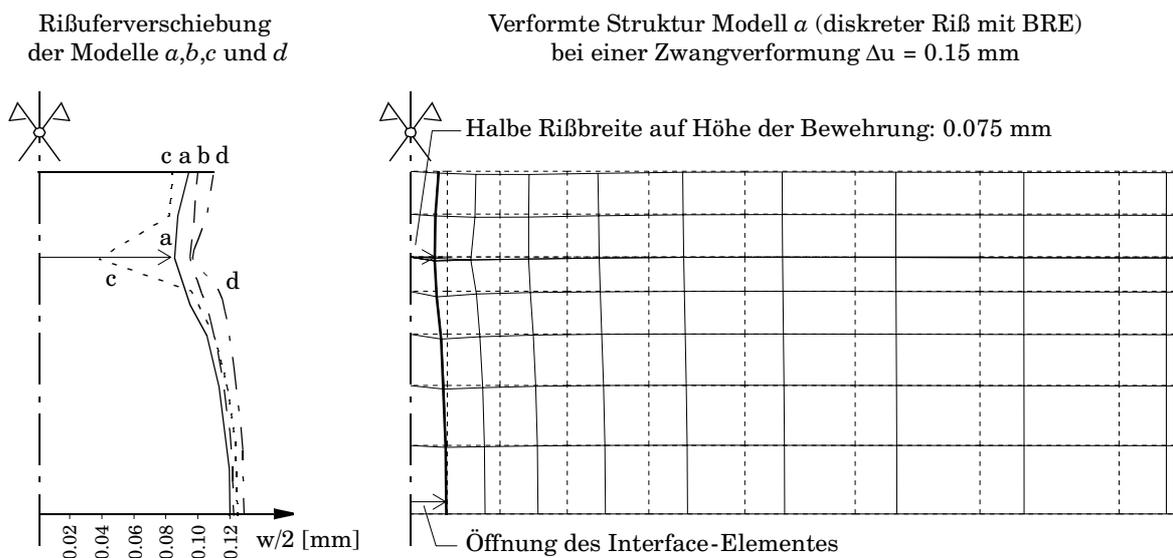


Abb. 6-14: Rißuferverschiebung für verschiedene Rißmodelle bei $\Delta u = 0.15$ mm.

Da die halb-empirische Rißbreitenregelung nach Heft 400 [187] an dem Mittelwert aus einer Vielzahl von Versuchsauswertungen kalibriert wurde, stellt dieser Wert für die Rißbreite eine geeignete Referenzlösung zur Eichung der Modelle dar. In Tabelle 6.1 sind die Werte für die Rißbreite, welche sich nach Heft 400 ergeben, den entsprechenden Werten aus den FE-Berechnungen gegenübergestellt. Die Werte nach Heft 400 wurden dabei auf Grundlage der Stahlspannung im Riß aus der FE-Berechnung mit Gleichung (6.12) berechnet. Die hier dargestellten Ergebnisse sind ohne den Ansatz einer effektiven Betonzugzone ermittelt, damit die Werte so weit wie möglich vergleichbar bleiben. Während die Ergebnisse des Modells *a* erwartungsgemäß fast identisch mit den Werten nach Heft 400 sind, treten bei den anderen Modellen jeweils erhebliche Abweichungen auf, die letztendlich zeigen, daß die Verformungen im FE-Modell nicht mit dem Bemessungsmodell zusammenpassen.

| Modell | a | b | c | d |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma_{s,Ri\beta,FE}$ [MPa] | 170 | 145 | 158 | 140 |
| $w_{Heft400}/2$ [mm] | 0.083 | 0.061 | 0.073 | 0.058 |
| $w_{FE}/2$ [mm] | 0.080 | 0.089 | 0.035 | 0.090 |
| $w_{Heft400} / w_{FE}$ | 1.04 | 0.69 | 2.09 | 0.64 |

Tabelle 6.1: Vergleich der errechneten Rißbreiten auf Höhe der Bewehrung mit Heft 400 [187].

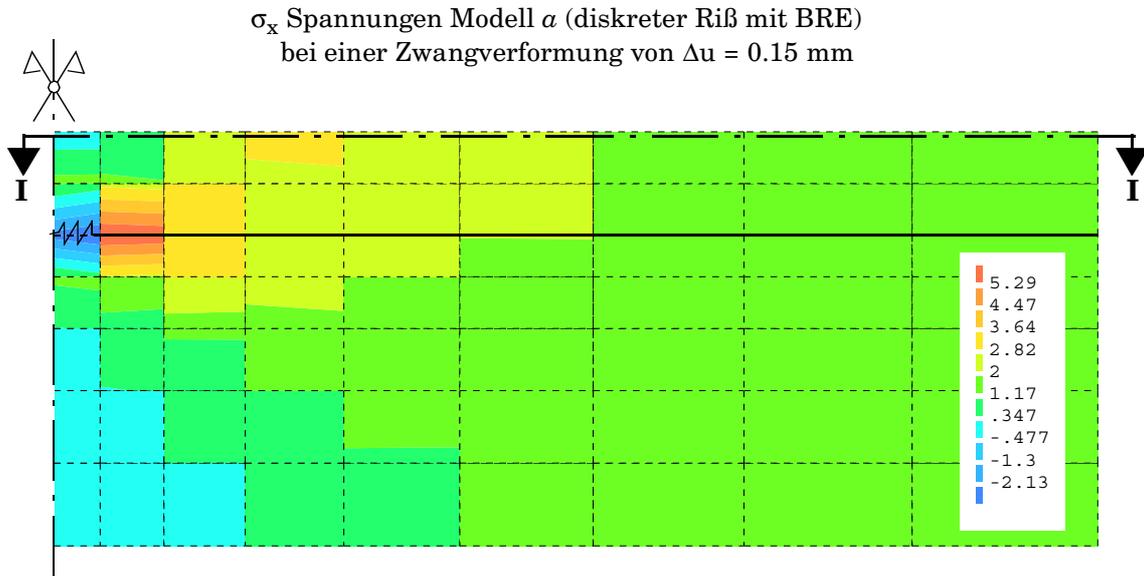
Entscheidend für die Entstehung eines weiteren Risses ist der Aufbau der Betonspannungen vom Rißufer aus. Wie Abb. 6-15 zeigt, führt das punktuelle Einleiten der Stahlzugkraft in den Stahlbetonverbund bei Modell a zu einem relativ starken Anstieg der Betonspannungen am oberen Querschnittsrand. Nach diesem Modell würde der nächste Riß in einem Abstand von etwa 25 cm entstehen. Auch beim Modell b würde in etwa diesem Abstand bei der Laststufe $\Delta u = 0.15$ mm die Betonzugfestigkeit überschritten. Bei den Modellen c und d mit verschmierter Rißabbildung ist die Zugfestigkeit bei dieser Laststufe bereits erreicht, und es sind weitere verschmierte Risse entstanden. Der Verlauf der Betonspannungen und der Stahlspannungen ist bei allen Modellvarianten ähnlich; im Modell a wird aus besagten Gründen die Stahlzugkraft etwas früher in Betonzugspannungen umgesetzt. Zwar liegen für die Spannungen keine Referenzlösungen vor, jedoch kann aufgrund der starken Übereinstimmung der drei Modellierungsvarianten b , c und d geschlossen werden, daß Modell a hier die schlechtesten Ergebnisse liefert.

Man kann bereits aus den Ergebnissen dieses einfachen Beispiels erkennen, daß die Stärke des in diesem Kapitel vorgestellten Rißmodells sicher in der Abbildung des Rißverlaufes liegt. Dieser kann mit verschmierten Rißmodellen nur unzureichend wiedergegeben werden. Durch die punktförmige Krafteinleitung im Abstand k_0 vom Rißufer wird der Verlauf der Spannungen in Beton und Bewehrung in der Rißumgebung jedoch schlechter abgebildet als beim Einsatz von Verbundelementen. Die wirklichkeitsnächste Lösung stellt somit Modell b dar, welches jedoch auch mit dem höchsten Diskretisierungsaufwand verbunden ist. Eine vorteilhafte Kombination stellt die Modellierung der für die Bemessung maßgebenden Risse entsprechend Modell a in Verbindung mit der Beschreibung des Stahlbetonverhaltens in den weniger interessanten Bereichen entsprechend Modell c dar. Dies ist nach Ansicht des Verfassers eine gute Lösung, um mit niedrigem Diskretisierungsaufwand zu qualitativ hochwertigen Aussagen über Rißbreite und Rißverlauf zu gelangen.

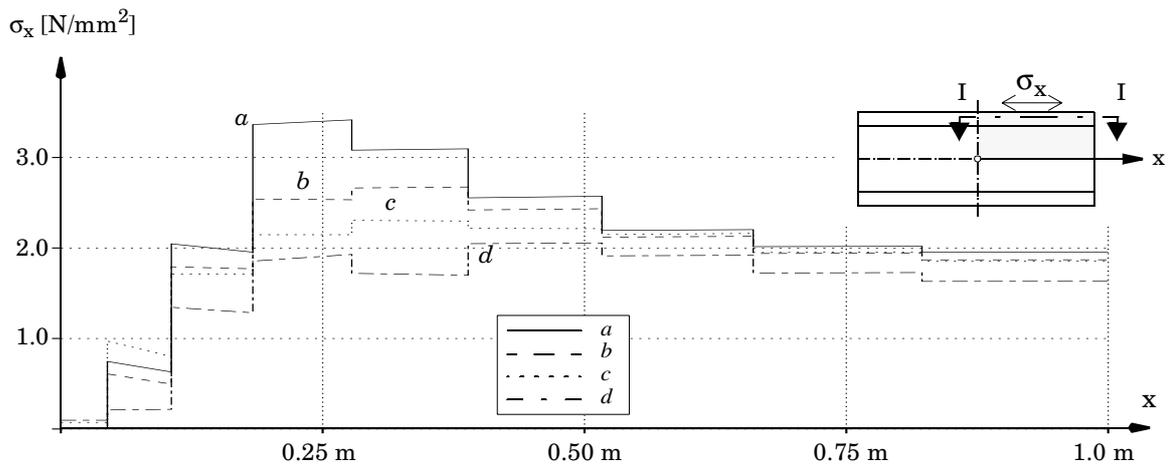
6.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein Konzept zur Berechnung von Rißbreiten mit der Finite-Element-Methode vorgestellt. Die Vorteile des Konzeptes sind:

- Konformität zu den Bemessungsnormen, da das Stoffgesetz direkt aus den Normenregelungen abgeleitet wird. Somit ist die Konsistenz zwischen Berechnungsmodell und Bemessungsmodell gewährleistet, da der Zusammenhang zwischen Stahlspannung im Riß und Rißbreite in beiden Modellen übereinstimmt.
- Erfassung des nachgiebigen Verbundes integral im Riß. Dadurch kann auf komplizierte Diskretisierungen mit Verbundelementen verzichtet werden.



Betonzugspannung σ_x für verschiedene Modelle im Schnitt I-I
bei einer Zwangverformung von $\Delta u = 0.15$ mm



Stahlspannung bei einer Zwangverformung von $\Delta u = 0.15$ mm

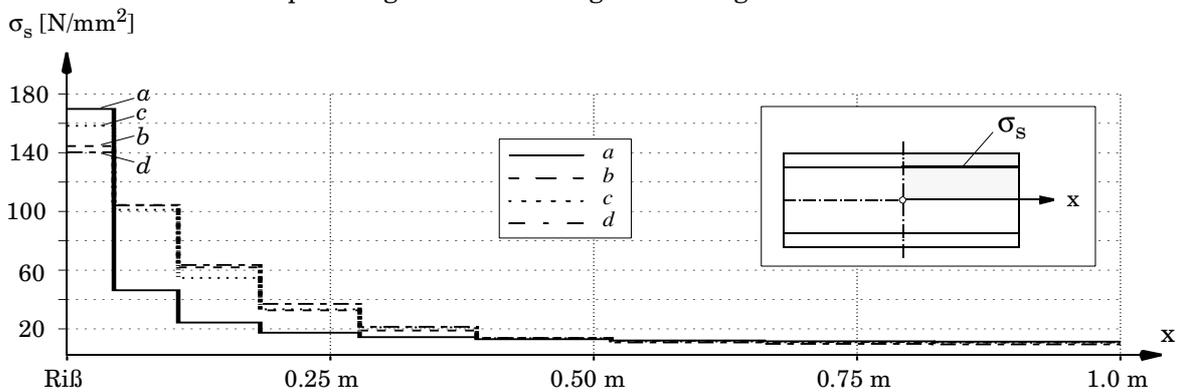


Abb. 6-15: Entwicklung der Betonlängsspannungen und Stahlspannungen ausgehend vom Riß.

- Der Verlauf der Rißbreite über die Querschnittsdicke wird sichtbar. Im Gegensatz zu den Rißformeln, welche nur Aufschluß über die Rißbreite auf Höhe des Bewehrungsstahls geben, kann der insbesondere für die Wasserdichtheit maßgebende Verlauf des Risses untersucht werden.

Als Nachteil ist zu nennen, daß der Spannungszustand in der unmittelbaren Umgebung des Risses infolge der singulären Krafteinleitung fehlerbehaftet ist. Außerdem wurde ein Verbundkriechen nicht in die Betrachtungen einbezogen, da die genormten Rißbreitenregelungen hierüber keine Angaben enthalten.

Kapitel 7

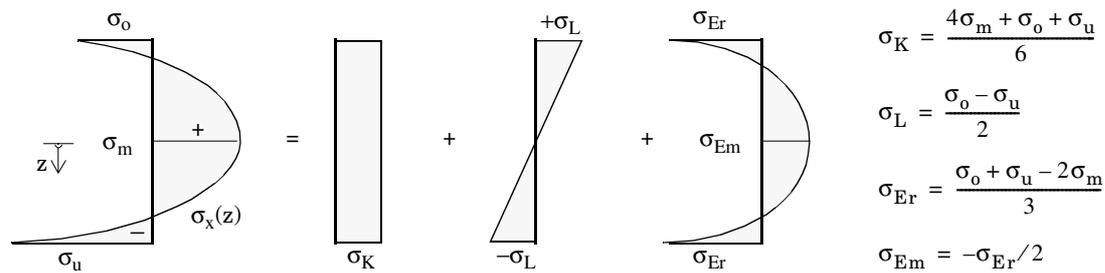
Verformungsbehinderte Bauteile unter Temperaturzwang

7.1 Zwangsspannungen infolge von Temperatureinwirkung

Die Tatsache, daß durch die Erwärmung und anschließende Abkühlung des Betons während der Hydratation bleibende Zwangsspannungen entstehen, hängt ursächlich mit der Veränderlichkeit der Werkstoffsteifigkeit zusammen. Der Beginn der Spannungsentwicklung wird durch das Ausbilden von Festkörpereigenschaften bei einem Hydratationsgrad α_0 markiert. Nach Überschreiten der Maximaltemperatur sind die anfänglich geringen Druckspannungen bereits nach einer Abkühlung um wenige Kelvin durch den nunmehr größeren Elastizitätsmodul abgebaut. Dieser Wechsel von Druck- zu Zugspannungen wird als zweiter Nullspannungszustand bezeichnet und durch die sogenannte zweite Nullspannungstemperatur ϑ_{N2} zum Zeitpunkt t_{N2} charakterisiert. Allerdings tritt dieser Zustand aufgrund der unterschiedlichen Erhärtungs- und Temperaturgeschichte an jedem Ort des Bauteils zu einem anderen Zeitpunkt auf. Deshalb spricht man von einem Nullspannungstemperatur-Gradienten, der die gedachte Verbindung der Nullspannungstemperaturen über einen Bauteilquerschnitt darstellt. Bei vollständiger Verformungsbehinderung können die Zwangsspannungen aus der Integration der Temperaturdehnungsraten ausgehend vom Nullspannungszustand ermittelt werden. Setzt man voraus, daß beim Durchlaufen der zweiten Nullspannungstemperatur die Entwicklung des Elastizitätsmoduls annähernd abgeschlossen ist, so können die Temperaturzwangsspannungen vereinfacht über einen gemittelten E-Modul E_{ers} im betrachteten Zeitraum errechnet werden:

$$\sigma_{Zwang\ 100\%}(t) = - \int_{t_{N2}}^t \alpha_T \cdot \dot{\vartheta} \cdot E(t) dt \cong \alpha_T \cdot (\vartheta_{N2} - \vartheta(t)) \cdot E_{ers} \quad (7.1)$$

Um das Tragverhalten unter Temperaturbeanspruchung zu analysieren, ist es zweckmäßig, verschiedene Anteile des Nullspannungstemperaturgradienten zu unterscheiden. Analog zur Zerlegung eines Spannungsgradienten in einen konstanten Normalkraftanteil, einen linearen Momentenanteil und einen parabolischen Eigenspannungsanteil kann auch der Temperaturgradient in entsprechende Anteile aufgeteilt werden.



Analoges Vorgehen für den Temperaturgradienten $\Delta\vartheta(z) = \vartheta(z) - \vartheta_{N_2}(z) \longrightarrow \Delta\vartheta_K, \Delta\vartheta_L, \Delta\vartheta_E$

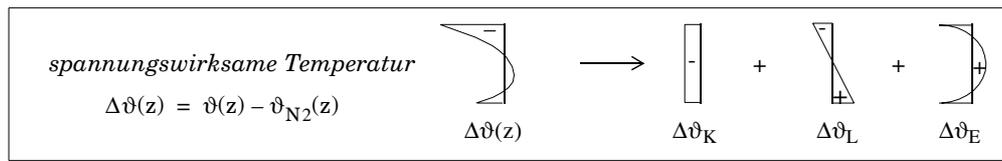
Abb. 7-1: Zerlegung des Spannungsverlaufes über den Querschnitt.

Unterstellt man ein Ebenbleiben des Querschnittes, was bei schlanken Bauteilen wie Bodenplatten zutreffend ist, so kann man die Ursachen der einzelnen Spannungskomponenten identifizieren. Der konstante Spannungsanteil resultiert aus dem konstanten Temperaturanteil in Kombination mit einer Behinderung der Bauteilverkürzung. Liegt die Verformungsbehinderung in Form von Reibung z.B. am unteren Querschnittsrand vor, so bewirken die Reibungskräfte zunächst einen linearen Spannungszustand gemäß Abb. 7-2, der mit einer Verkrümmung einhergeht. Wird die Verkrümmung des Bauteils durch Randbedingungen oder bei Bodenplatten durch das aktivierte Eigengewicht behindert, so überlagert sich ein weiterer linearer Spannungsanteil. Daraus resultierend entsteht ein zentrischer Spannungszustand, was zwingend aus dem Fehlen einer Verkrümmung folgt [211]. Ein Abheben am Plattenrand würde dazu führen, daß dort die Reibungskräfte und damit die Ursache des Abhebens deaktiviert werden. Dies bedeutet, daß ein Abheben infolge von Bodenreibung nicht möglich ist, sondern nur infolge eines linearen Temperaturgradienten über die Plattendicke (Abb. 7-2). Insbesondere bei jungem Beton ist das Abheben infolge eines Temperaturgradienten auf eine sehr kurze Länge beschränkt, da die Aufnahme des Kragarmmomentes infolge Eigengewicht durch die Betonzugspannungen erfolgen muß. Der Temperaturgradient führt im Bereich behinderter Verkrümmung zu einer linearen Spannungsverteilung im Querschnitt (Abb. 7-2). Der parabolische Temperaturanteil führt bei ebenbleibenden Querschnitten unmittelbar zu einem korrespondierenden Eigen-spannungsanteil ohne Spannungsresultierende. Dieser Spannungsanteil ist oftmals maßgebend für den Zeitpunkt der Rißbildung (vgl. Kapitel 8).

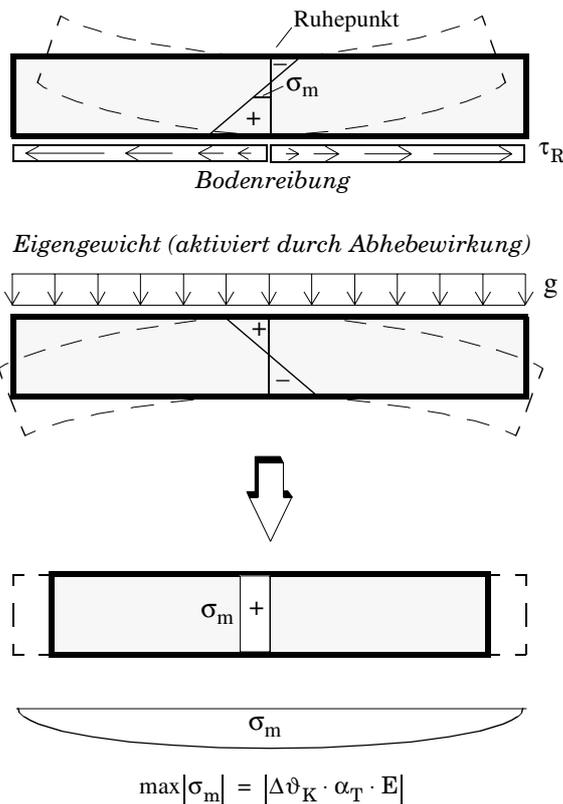
7.2 Verformungsbehinderung durch Bodenreibung

7.2.1 Allgemeines

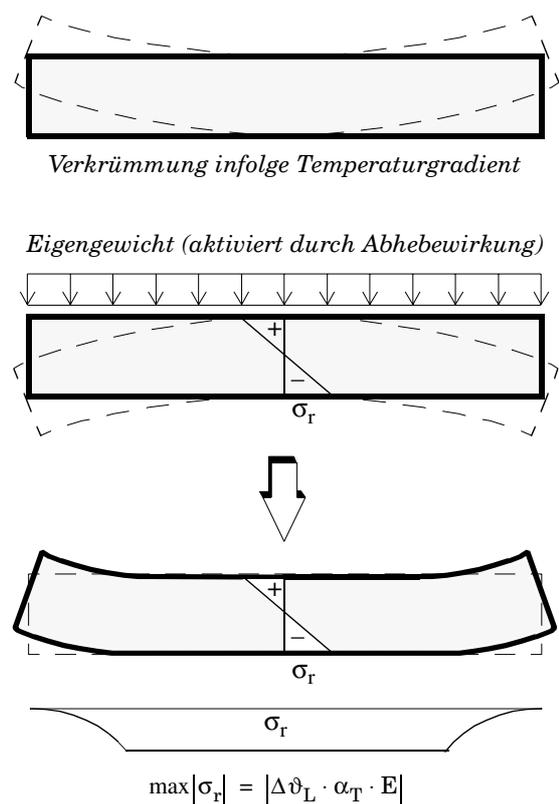
Die kontinuierliche Verformungsbehinderung stellt zwar zum einen die Ursache der Rißbildung dar, sie trägt aber zum anderen auch zur Rißbreitenbeschränkung nach erfolgter Rißbildung bei. Damit beide Wirkungen in einer FE-Berechnung realistisch erfaßt werden können, sind entsprechende Modelle für die Interaktion zwischen Bauwerk und Baugrund erforderlich. An dieser Stelle wird lediglich kurz auf Modelle für flächenförmige Reibung eingegangen, die von Kolb [116] und



a) Zwang aus konstanter Abkühlung $\Delta\vartheta_K < 0$



b) Zwang aus Temperaturgradient $\Delta\vartheta_L$



c) Zwang aus Eigenanteil ϑ_E

Erzeugt Eigenspannungen unabhängig vom statischen System

$$\vartheta_E(z) \rightarrow \sigma_E(z) = -\Delta\vartheta_E(z) \cdot \alpha_T \cdot E$$

Abb. 7-2: Normalspannungsverteilung infolge Temperaturänderung bei Bodenplatten (schematisch).

Schütte [197] für Bodenplatten entwickelt wurden. Die Größe der Schubspannungen in der Sohlfuge ist von folgenden Faktoren abhängig [197]:

- Ausbildung der Sohlfuge (Folie, Gleitschicht, ...).
- Planmäßige und unplanmäßige Unebenheiten der Sohlfuge.
- Größe der Normalspannungen σ_z senkrecht zur Sohlfuge.
- Rauigkeit der beiden Kontaktflächen.
- Eigenschaften von Baugrund bzw. Unterbau.
- Größe der auftretenden Relativverschiebungen.

Bei bituminösen Gleitschichten spielen noch weitere Einflußfaktoren eine Rolle. Da der Problemkreis der Verbundmodellierung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, werden hier nur die Modelle vorgestellt, welche bei den Berechnungen in Kapitel 8 zur Anwendung kommen.

7.2.2 Ausführung mit einer Gleitschicht

Das Einlegen einer Folie zwischen Baugrund und Unterbeton bzw. Beton hat noch keine Wirkung als Gleitschicht. Versuche, durch zweilagige Folien eine Gleitwirkung zu erzielen, zeigten, daß dies nur bei absoluter Ebenheit beider Kontaktflächen möglich ist¹. Deshalb wird hier unter Gleitschicht die Kombination aus einem zweilagigen Vlies mit zwischenliegender Folie verstanden. Das Vlies dient zum Ausgleich unvermeidbarer Unebenheiten der Kontaktflächen. So geschützt, kann die Folie bei Bedarf als Dichtungselement ausgelegt werden. Die Wirkung der Gleitschicht wird in der Regel durch die Coulombsche Reibung beschrieben. Der Reibkoeffizient ist abhängig von der Dicke der Vliese und der Ebenheit der Kontaktflächen. Schütte [197] gibt folgende Bandbreite für die Haft- bzw. Gleitreibung an:

$$\mu = 0,1 \dots 0,4 \quad (7.2)$$

Insbesondere bei der ersten Verschiebung können jedoch auch deutlich höhere Reibkoeffizienten auftreten [135].

7.2.3 Ausführung ohne Gleitschicht auf nichtbindigen Böden

Schütte [197] vereinfacht die von Kolb [116] aufgestellte Scherspannungs-Verschiebungs-Kurve, so daß auch die Ausführung ohne Gleitschicht auf nichtbindigem Untergrund durch die Coulombsche Reibung beschrieben werden kann.

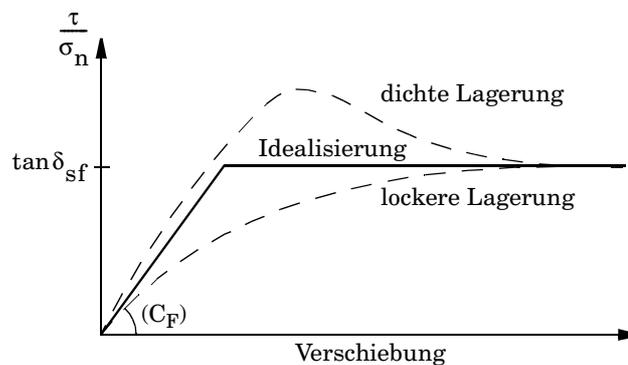


Abb. 7-3: Kraftübertragung in der Sohlfuge ohne Gleitschicht bei nichtbindigem Untergrund [116, 197].

Für den Sohlreibungswinkel δ_{sf} ist in [116] ein formelmäßiger Zusammenhang angegeben. Bei Mittelsand bis Feinkies ergibt sich eine Bandbreite von 30 bis 45°. Hier wird ausgehend von Feinkies mit 45° ($\tan \delta_{sf} = \mu = 1.0$) gerechnet. Für die anzusetzende Steifigkeit C_F enthalten [116] und [197]

1. Schütte [197] gibt einen Gleitreibungsbeiwert bei zweilagiger Folie von 0.60 an. Dieser Wert liegt in einem Bereich, der auch ohne Folie mit einem geeigneten Unterbau erreicht werden könnte.

stark unterschiedliche Angaben. Aufgrund der großen Relativverschiebungen in der Sohlfuge ist es notwendig, mit einer nichtassoziierten Fließregel und einem Dilatanzwinkel von 0° zu rechnen. Der damit verbundene Nachteil einer unsymmetrischen Gesamtsteifigkeitsmatrix muß in Kauf genommen werden, um brauchbare Ergebnisse zu erzielen.

7.3 Rißbildung

7.3.1 Mechanismus der Rißbildung bei Last und Zwang

Der Mechanismus der Rißbildung unterscheidet sich grundlegend je nachdem, ob es sich bei der Rißursache um äußere Lasten oder um Zwang handelt. Das Verhalten kann in Analogie zur Kraft- und Wegsteuerung eines Zugversuches gesehen werden. In Abb. 7-4 sind die entsprechenden Kraft-Dehnungslinien eingezeichnet.

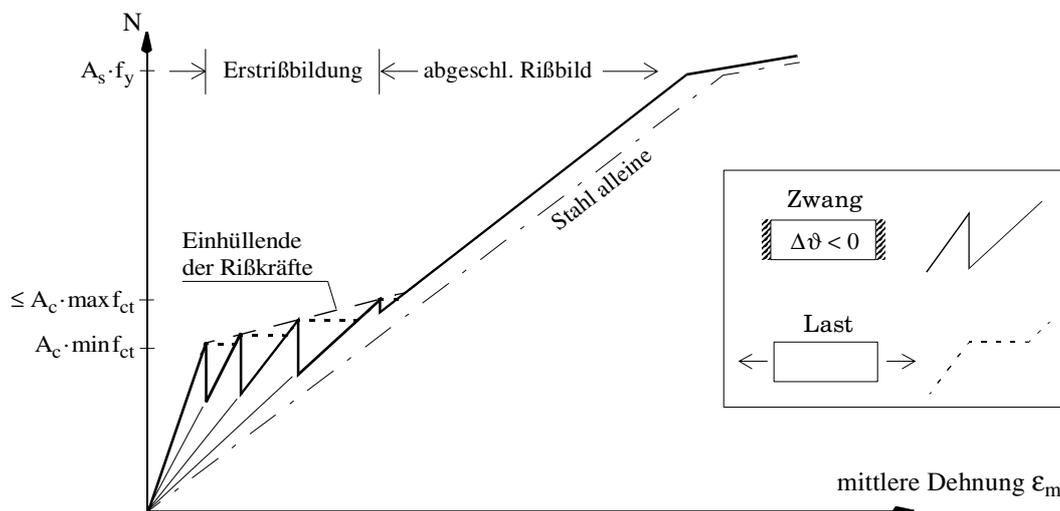


Abb. 7-4: Unterschied in der Erstrißbildung bei mittlerer Last- und Zwangbeanspruchung [175].

Obwohl oft nur die gemeinsame einhüllende Kurve beschrieben wird (vgl. Abb. 6-1), ist der Unterschied auf dem Lastniveau der Erstrißbildung durchaus signifikant. Bei Zwang wird nämlich die Rißursache durch die Rißentstehung abgebaut, was zu einem plötzlichen Spannungsabfall und dementsprechend zu einer Entlastung bereits geöffneter Risse führen kann, während bei Lastbeanspruchung ein plötzlicher Verschiebungszuwachs in Form der Rißbreite des neu entstandenen Risses auftritt. Der fortschreitende Abbau der Rißursache ist auch der Grund dafür, daß bei reinem Zwang in der Regel der Erstrißbereich nicht verlassen wird.

7.3.2 Anwendbarkeit der genormten Mindestbewehrung

Auf eine Wiedergabe der unterschiedlichen Regelungen zur Rißbreitenbeschränkung wird hier verzichtet. Im wesentlichen beruhen sie auf den in Kapitel 6 dargestellten Grundlagen. Trotzdem ist

eine direkte Anwendung bei frühem Temperaturzwang problematisch, da lediglich ein Querschnittsnachweis erbracht wird. Insbesondere gehen folgende Punkte nicht in den Nachweis ein:

- Mechanismus der Rißbildung, d.h. Abbau des Zwangs.
- Geometrie des Bauwerkes.
- Grad der Verformungsbehinderung.
- Erhärtungsbedingungen und Hydratationsvorgang.
- Wirkung einer kontinuierlichen Verformungsbehinderung auf die Rißbreite.

7.4 Bemessungskonzept auf Grundlage von Finite-Element-Berechnungen

7.4.1 Materialparameter als Berechnungsgrundlage

Bei der Behandlung von Zwanglastfällen ist zu beachten, daß sich Festigkeiten und Steifigkeiten direkt auf die Schnittgrößen und nicht nur auf deren Verteilung innerhalb des Tragwerkes auswirken. Abminderungen der Materialkennwerte bewirken geringere Zwangbeanspruchungen und liegen deshalb auf der unsicheren Seite. Für bestimmte bemessungsrelevante Größen, wie z.B. die Rißbreite, ist eine große Zugfestigkeit ungünstig. Gemäß DIN 1045-1 [52] sind für den Nachweis im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit Mittelwerte der charakteristischen Festigkeiten zu verwenden. Eine Berechnung auf dieser Grundlage führt zu mittleren voraussichtlichen Rißbreiten. König und Tue [115] vertreten die Auffassung, daß der Ansatz eines Mittelwertes für die Zugfestigkeit bereits einem oberen Grenzwert entspricht und somit zu oberen Grenzwerten für die Rißbreite führt, da Risse an lokalen Schwachstellen entstehen, deren Zugfestigkeit geringer ist als die mittlere Zugfestigkeit im Bauteil. Andererseits ist bei Baustellenbetonen unter Umständen mit erheblichen Überfestigkeiten zu rechnen. Vor diesem Hintergrund erscheint folgendes Vorgehen bei der Berechnung von Zwangbeanspruchungen infolge Hydratationswärme zweckmäßig:

- Wenn Versuchsergebnisse nachzurechnen sind oder das Tragverhalten eines Bauwerkes möglichst realitätsnah untersucht werden soll, ist es angebracht, mit mittleren Steifigkeitswerten, die aus Versuchen mit dem verwendeten Beton gewonnen werden sollten, zu rechnen. Die bruchmechanischen Parameter, insbesondere die Zugfestigkeit, können als Mittelwerte oder über Grenz betrachtungen in die Rechnung einbezogen werden. Damit erhält man einen wahrscheinlichen Bereich für die mittlere Rißbreite.
- Wenn eine Rechnung zur Dimensionierung eines Bauteils dient, ist mit den Mittelwerten ohne Abminderung zu rechnen. Bei der Untersuchung des Rißrisikos ist jedoch gemäß dem Gedanken der lokalen Fehlstelle der untere Grenzwert der Betonzugfestigkeit anzusetzen. Kommt man zu dem Schluß, daß Rißgefahr besteht, und die Rißbreite das maßgebende Bemessungskriterium für die Bewehrung ist, so wird die Rechnung mit dem nun ungünstigeren Mittelwert der Betonzugfestigkeit wiederholt¹. Man erhält dann ein Maß für den Mittelwert der Rißbreite im Bauteil.

1. Wenn signifikante Überfestigkeiten des Baustellenbetons nicht auszuschließen sind, muß ein entsprechend größerer Wert für die Betonzugfestigkeit angesetzt werden. Evtl. ist eine Obergrenze für die Betonzugfestigkeit im Bauwerk anzuordnen (vgl. z.B. die Richtlinien für die Ausführung von Brückenkappen).

Nach König und Tue [115] kann das Verhältnis zwischen maximaler und mittlerer Rißbreite wie folgt angenommen werden:

$$\frac{w_m}{w_{\max}} = 0,72 \quad (7.3)$$

Kann z.B. eine maximale Rißbreite von 0.2 mm zugelassen werden, so ist der Rechenwert, der auf Grundlage von mittleren Materialparametern ermittelt wird, auf $0,72 \cdot 0,2 \sim 0,15$ mm zu begrenzen. Es sei jedoch an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, daß trotzdem einzelne breitere Risse auftreten können, welche verpreßt werden müssen.

Nach EC2 [65] und MC90 [43] ist die mittlere rechnerische Rißbreite bei Zwang mit einem Erhöhungsfaktor β , der abhängig von der Bauteildicke mit 1.3 ($d < 30$ cm) bis 1.7 ($d > 80$ cm) angegeben wird, zu multiplizieren, um einen charakteristischen Bemessungswert zu erhalten.

7.4.2 Kriterien für die zulässige Rißbreite

Die Rißbreite ist aus Gründen des Korrosionsschutzes und der Gebrauchstauglichkeit zu begrenzen. Das im Kontext dieser Arbeit maßgebende Kriterium stellt die Dichtheitsanforderung an Bauteile aus wasserundurchlässigem Beton dar, welche durch den Bauherrn festzulegen ist [130]. *Dicht* bedeutet in diesem Zusammenhang zum Beispiel, daß der Wasserdurchtritt durch das Bauteil, z.B. infolge Diffusion durch die Wand einer weißen Wanne, geringer ist als die natürliche Verdunstungsmenge an der Innenseite. Voraussetzung für die Dichtheit ist das Vermeiden wasserführender Risse, was nicht bedeutet, daß Risse generell verhindert werden müssen. Vielmehr sind die auftretenden Zwangdehnungen zu minimieren und durch geeignete Maßnahmen auf möglichst viele, in ihrer Öffnungsbreite entsprechend beschränkte Risse zu verteilen.

Neben den Angaben für zulässige Rißbreiten in den Normen sind auch sonstige Richtlinien zu beachten. Z.B. empfiehlt der Koordinierungsausschuß der Prüfämter und Prüfsingenieure in Bayern [232], bei überwiegender Zwangbeanspruchung die Rißbreiten nach Lohmeyer [132] einzuhalten. Außerdem stehen Forschungsergebnisse zur Verfügung, welche die Selbstheilungsmöglichkeiten von Rissen in abdichtenden Betonbauteilen untersuchen [68]. Edvardsen [66] berichtet, daß bei Rissen bis zu 0.2 mm Rißbreite eine vollständige Selbstheilung beobachtet wurde, allerdings teilweise erst nach einer Wasserbeaufschlagung von mehreren Wochen.

7.4.3 Anwendungen und Rechengang

Frühere Untersuchungen, die auf einer gegenüber dem beschriebenen Modell vereinfachten Betrachtung beruhen, zielten auf die Mindestbewehrung von Tunnelinnenschalen, welche bei einer zweischaligen Bauweise als Dichtelement gegen drückendes Grundwasser eingesetzt werden. Basierend auf Parameterstudien und Messungen wurden für die Innenschalen verallgemeinerte Regelungen zur erforderlichen Mindestbewehrung aufgestellt, welche seit einiger Zeit erfolgreich in Münchner U-Bahn-Tunnels angewandt werden [124, 125, 182, 183].

In Abb. 7-5 ist ein allgemeines Schema für den Rechengang zur Ermittlung der Mindestbewehrung mit den vorgestellten Methoden dargestellt.

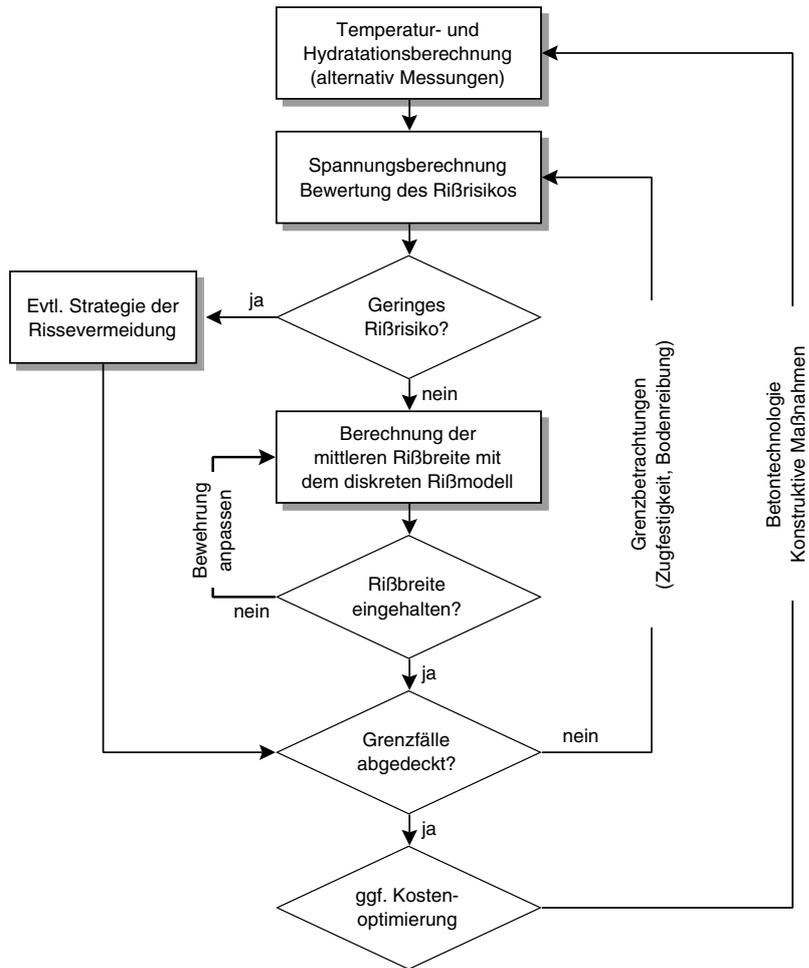


Abb. 7-5: Rechengang zur Ermittlung der rißbreitenbeschränkenden Bewehrung.

Kapitel 8

Anwendung am Beispiel von Bodenplatten weißer Wannen

8.1 Berechnungsgrundlagen

8.1.1 Problemstellung

In zahlreichen Veröffentlichungen [z.B. 80, 97, 132, 161, 205-207] wurde die Problematik der Rißbildung in Bodenplatten weißer Wannen nach verschiedenen Gesichtspunkten untersucht. Prinzipiell soll die Bodenplatte zusammen mit den Außenwänden eine „weiße“ – also ohne zusätzliche bituminöse Abdichtung auskommende – Wanne bilden, die gegen das anstehende Grundwasser dicht ist. Eine Voraussetzung dafür ist, daß keine wasserführenden Risse auftreten.

Die Reibung in der Sohlfuge, eine Sauberkeitsschicht oder auch örtliche Verdickungen der Bodenplatte im Bereich von konzentrierten Lasten behindern die Temperaturdehnungen, die sich im Verlauf der Hydratation einstellen, und führen zu Zwangspannungen. Selbst wenn die Zwangspannungen im Mittel deutlich unterhalb der Betonzugfestigkeit bleiben, können Spannungsspitzen an lokalen Fehlstellen oder an Aussparungen auftreten, welche eine Rißbildung initiieren. Deshalb ist eine Strategie, die ausschließlich auf die Rißvermeidung zielt, nur mit einem großen konstruktiven und betontechnologischen Aufwand durchführbar, wie ausgeführte Bauwerke gezeigt haben [161].

In diesem Kapitel soll dargestellt werden, wie die in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten theoretischen Konzepte eingesetzt werden können, um Zwangspannungen und Risse in Bodenplatten zu untersuchen, wobei ausschließlich der Bauzustand der Bodenplatte betrachtet wird. Belastungen aus aufgehenden Bauteilen oder Verkehrslasten werden nicht betrachtet, da sie für den frühen Temperaturzwang nur eine untergeordnete Rolle spielen. Die berechneten Zwangspannungen und Rißbreiten stellen den Ausgangszustand für eine Überlagerung mit später auftretenden Lasten dar.

8.1.2 Rechenmodell und Systemausschnitt

Ziel der Berechnungen ist es, den Rißverlauf über die Plattendicke zu ermitteln. Dazu werden aus der dreidimensionalen Struktur zwei zweidimensionale Ausschnitte betrachtet, welche als Scheibe im ebenen Verzerrungszustand die Platte im Querschnitt zeigen. Zum einen soll das Verhalten im Randbereich untersucht werden (System I, Abschnitt 8.3), zum anderen ein Ausschnitt aus dem Inneren der Platte, wobei davon ausgegangen wird, daß der Einfluß des Randes vernachlässigt werden kann (System II, Abschnitt 8.4).

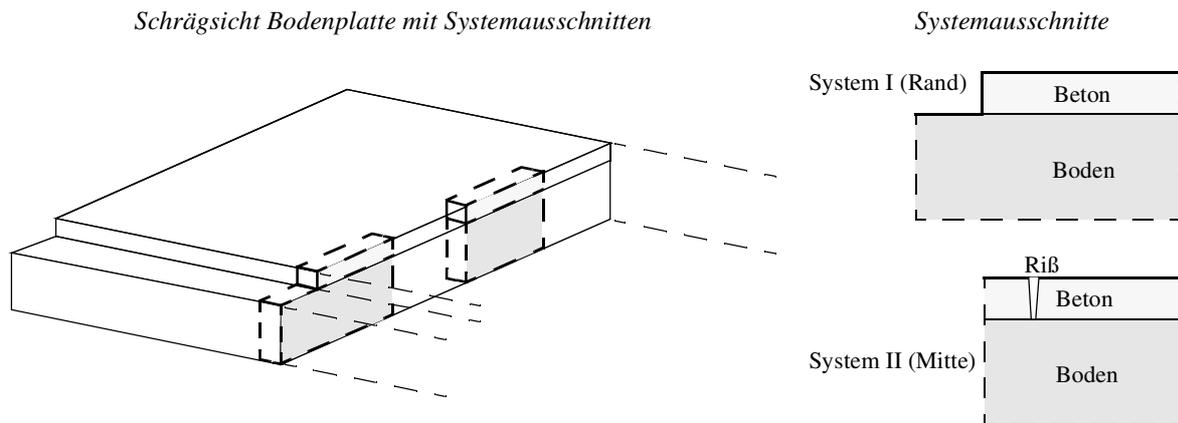


Abb. 8-1: Bodenplatte mit Berechnungsschnitten.

Die betrachteten Risse stellen sich in der Scheibe als Linienrisse dar. Es wird unterstellt, daß die Rißrichtung senkrecht zum Scheibenmodell verläuft, was ohne Einschränkung angenommen werden kann. In beiden Rechenmodellen wird ein gewisser Bodenbereich diskretisiert. Dies ist zumindest für die Temperaturberechnung notwendig, da die Wärmeleit- und Wärmespeichereigenschaften des Bodens den Temperaturzustand in der Platte maßgebend beeinflussen. Durch Wärmerandbedingungen könnte allenfalls der Wärmeverlust in der Aufheizphase dargestellt werden, nicht jedoch die Wärmespeicherung und Rückleitung in die Bodenplatte. Für die Spannungsberechnung wird das Netz aus der Temperaturberechnung unverändert übernommen.

8.1.3 Finite-Element-Diskretisierung

Die Berechnungen wurden mit dem FE-Programm DIANA durchgeführt, das an der TU Delft entwickelt wurde [241]. Das Programm bietet die Möglichkeit der einseitig gekoppelten Temperatur-Spannungs-Berechnung entsprechend dem Kopplungsgrad B nach Abschnitt 5.1.2. Außerdem ist es möglich, durch sogenannte *user-supplied-subroutines* eigene Materialgesetze durch FORTRAN-Routinen zu implementieren. Dies wurde u. a. dazu genutzt, um das hydrationsabhängige Materialverhalten des Betons sowie das diskrete Bewehrungs-Riß-Element nach Kapitel 6 zu realisieren.

Für die Wärmeberechnung wurden vierknotige Elemente mit linearen Ansätzen für die Temperatur verwendet. Zur umgebenden Luft sind linienförmige Übergangselemente angeordnet. Soweit nicht anders angegeben, entspricht die angesetzte Wärmeübergangszahl nach Kehlbeck [107] einer Windgeschwindigkeit von 1 m/s ($\alpha_{ii} = 11.5 \text{ [W/m}^2\text{K]}$). Zur Modellierung einer Wärmedämmung oder Holzschalung der Dicke d_D und der Wärmeleitfähigkeit λ_D wird eine modifizierte Wärmeübergangszahl nach Gleichung (5.24) angesetzt.

Die Hydratation wird entsprechend Anhang B.4 mit der Reifefunktion nach Freiesleben et al. und dem Hydratationsansatz nach Jonasson realisiert. Die Hydratationsabhängigkeit der Stoffparameter wird mit *user-supplied-subroutines* nach den Gleichungen (3.12), (3.19) und (3.25) modelliert. Die Spannungsberechnung erfolgt mit achtknotigen Scheibenelementen mit quadratischen Verschiebungsansätzen. Dies ist konsistent mit den linearen Temperaturdehnungen, die aus der Temperaturberechnung übernommen werden, so daß dieselbe Elementierung verwendet werden kann. Die Scheibenelemente erhalten zusätzlich zu den vorhandenen Eckknoten aus der Temperatur-

berechnung Knoten in den Mittelpunkten der nach wie vor geradlinigen Elementkanten. Die Interface-Elemente, die zur Modellierung der diskreten Risse und der Bodenreibung eingesetzt werden, sind demzufolge sechsknotige Elemente mit geradlinigen Elementkanten und quadratischen Verschiebungsansätzen, die in der Wärmeberechnung keine Funktion besitzen. Die diskrete Bewehrung wird außerhalb des Risses durch dreiknotige Fachwerkelemente mit einem quadratischen Ansatz für die Längsverschiebung abgebildet. Die Modellierung der Durchdringung des diskreten Risses erfolgt mit dem diskreten Bewehrungs-Riß-Element nach Kapitel 6.

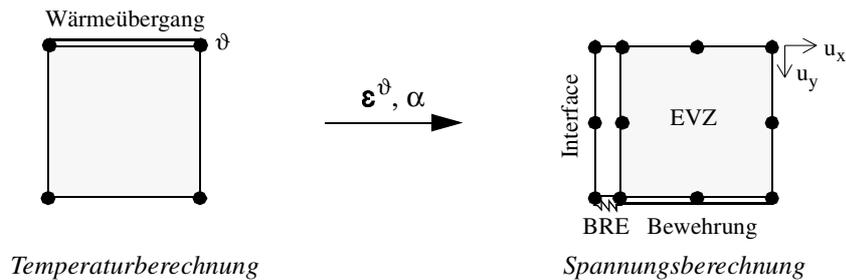


Abb. 8-2: Verwendete Elemente.

8.1.4 Interaktion mit dem Boden

Wie bereits erwähnt, ist die Diskretisierung des Bodens zur Erfassung des Temperaturzustandes notwendig. In der Verformungsberechnung werden die Bodenelemente als linear-elastisch angenommen, wobei in der Verlängerung des diskreten Risses im Beton auch im Boden die Fortsetzung des Risses ermöglicht wird, da sonst der Boden die Öffnung eines Trennrisses behindern würde. Die elastischen Materialkennwerte werden mit $E = 100 \text{ N/mm}^2$ und $\nu = 0.35$ angenommen. Das Verhalten in der Fuge Boden–Beton bzw. Boden–Sauberkeitsschicht kann nach Abschnitt 7.2 durch Coulombsche Reibung (Kohäsion 20 kN/m^2 , Sohlreibungswinkel 45° , Dilatanzwinkel 0°) mittels Interface-Elementen abgebildet werden.

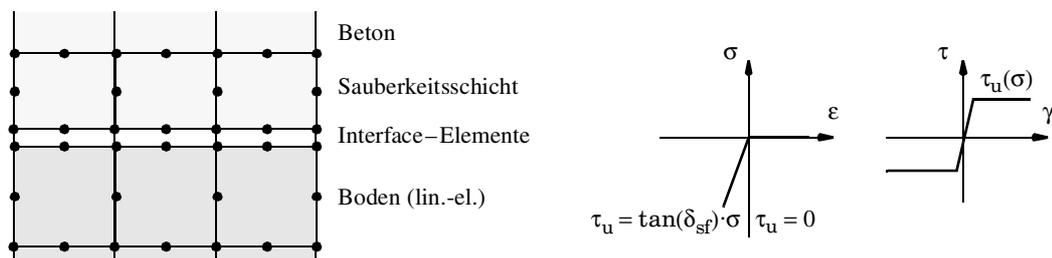


Abb. 8-3: Modellierung der Sohlfuge.

In der Temperaturberechnung werden für den Boden eine Ausgangstemperatur von $\vartheta = 15^\circ\text{C}$ und die folgenden Materialparameter angesetzt:

$$\lambda = 1,4 \left[\frac{\text{W}}{\text{mK}} \right], \quad \rho = 2000 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right], \quad c = 800 \left[\frac{\text{J}}{\text{kgK}} \right]$$

8.2 Verifikation des Berechnungsmodells

8.2.1 Allgemeines

Als erste beispielhafte Anwendung der vorgestellten Rechenmodelle werden Versuche und Messungen von Planerer [161] nachgerechnet. Durch den Vergleich der errechneten mit den gemessenen Werten sollen die Rechenmodelle zur Hydratations- und Spannungsberechnung verifiziert werden. Einschränkend ist jedoch zu erwähnen, daß in [161] nicht alle Materialparameter vorliegen, die für eine Nachrechnung mit den Modellen dieser Arbeit erforderlich sind. Dies bedeutet, daß einige Eingangswerte durch Abgleich mit ausgesuchten Meßergebnissen gefunden werden müssen, worauf jedoch an den entsprechenden Stellen ausdrücklich hingewiesen wird.

8.2.2 Adiabatische Wärmeentwicklung

Zunächst wird die Wärmeentwicklung der Betone *A* und *D* aus [161] betrachtet, welche von Planerer mittels der adiabaten Kalorimetrie ermittelt wurde. Als Eingangswert für die Berechnung steht die freigesetzte Wärmemenge nach 5 Tagen Q_{5d} zur Verfügung. Der für das Rechenmodell erforderliche Wert Q_{∞} wird so ermittelt, daß die Wärmemenge in der Rechnung nach 5 Tagen Q_{5d} erreicht. Außerdem liefert der Wert der größten Erwärmungsgeschwindigkeit $\dot{\vartheta}_{\max}$ einen Anhaltswert für das Maximum der Wärmefreisetzung $q_{\max} = \dot{\vartheta}_{\max} \cdot c_p$. Da keine Eingangswerte für einen analytischen Hydratationsansatz zur Verfügung stehen, werden die in Anhang B abgeleiteten Werte für die Betone aus der Arbeit von Huckfeldt (Anhang A.1) übernommen. Dieses Vorgehen basiert auf dem in Anhang B dargelegten Zusammenhang, daß selbst Betone mit relativ unterschiedlicher Wärmeentwicklung in normierter Form und bezogen auf den Hydratationsgrad ähnliche Charakteristika aufweisen. Demzufolge wird für den schnell erhärtenden Beton *A* die normierte Wärmefreisetzung von Beton *LI* und für Beton *D* diejenige von Beton *RI* verwendet.

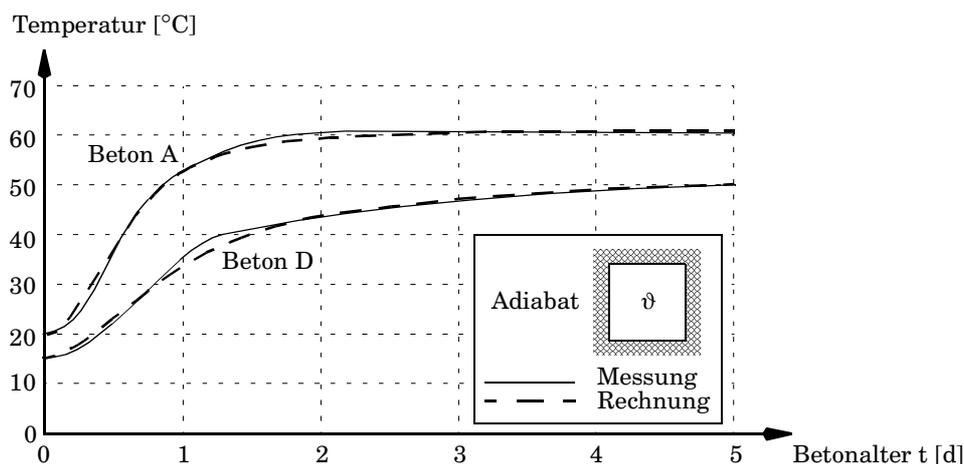


Abb. 8-4: Adiabate Temperaturentwicklung: Vergleich von Rechenergebnissen mit Messungen aus [161].

Die so ermittelten Kurven für die adiabate Temperaturentwicklung sind in Abb. 8-4 den Meßergebnissen gegenübergestellt. In Anbetracht der geschilderten, gegenüber einer inversen Bestimmung der Hydratationsparameter vereinfachten Vorgehensweise ist die erzielte Übereinstimmung als äußerst zufriedenstellend einzustufen und als Beleg der Normierung in Anhang B zu werten.

8.2.3 Reißrahmenversuche

Plannerer [161] führte Versuche an sogenannten Modellbauteilen in der Temperaturspannungs-Prüfmaschine durch. Dabei simulierte er die Erhärtungsbedingungen im Inneren von Betonwänden unterschiedlicher Dicke. Gemessen wurde die Entwicklung der Zwangspannungen bei vollständiger Verformungsbehinderung bis zum ersten Riß, der das Versagen des unbewehrten Probekörpers markiert. Für die Spannungsberechnung im ebenen Spannungszustand müssen die Größen E_{∞} und α_0 aus den Meßergebnissen abgeschätzt werden. Da keine Parameter für eine Kriechfunktion zur Verfügung standen, wird ein Standardansatz entsprechend dem Double Power Law nach Abschnitt 4.3.2.4 verwendet.

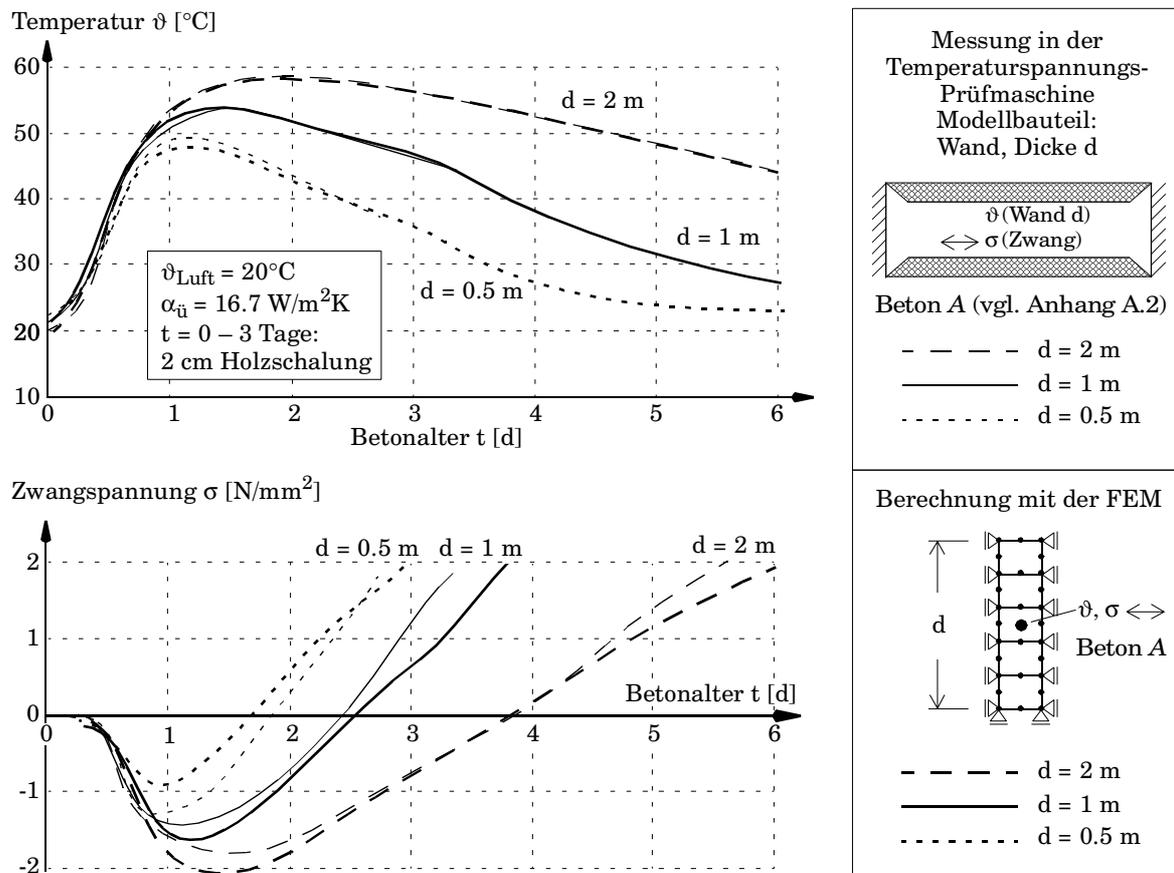


Abb. 8-5: Reißrahmenversuche: Vergleich von Rechenergebnissen mit Messungen aus [161].

Erwartungsgemäß ist die Übereinstimmung der Temperaturverläufe ähnlich gut wie bei den adiabatischen Berechnungen (Abb. 8-5). Die Spannungskurven zeigen jedoch eine weniger gute Übereinstimmung, wobei allerdings festgestellt wurde, daß die Ergebnisse sehr sensitiv auf Änderungen der Kriechparameter reagieren. In der natürlichen Streuung der Kriechparameter und der damit verbundenen Unsicherheit bei der Vorhersage des Kriechverhaltens liegt vermutlich die Hauptschwierigkeit bei der rechnerischen Prognose von Zwangspannungen in jungem Beton. Hier sollten aufbauend auf den theoretischen Grundlagen, wie sie in Kapitel 4 dargelegt wurden, weitergehende Forschungsanstrengungen, z.B. in Form von Sensitivitätsstudien unternommen werden, um zu verlässlichen Vorhersagemethoden zu gelangen. Notwendig wären u.a. Ansätze für die zu erwartende Bandbreite des

viskoelastischen Verhaltens ausgehend von wenigen, im vornherein bekannten Betonparametern, um Grenzbetrachtungen anzustellen.

8.2.4 Messungen an einer ausgeführten Bodenplatte

Von Plannerer [161] wurden ebenfalls Messungen an der Bodenplatte des Verwaltungsgebäudes der WWK München durchgeführt. Die Platte, welche im Endzustand $70 \times 200 \text{ m}^2$ mißt, ist in ihrem Aufbau über die Dicke in Abb. 8-6 dargestellt. Das Planungskonzept zielte auf die völlige Vermeidung von hydratationsbedingten Rissen. Dafür wurde ein beträchtlicher Aufwand seitens der Biontechnologie und Nachbehandlung betrieben. Obwohl die Voruntersuchungen wie auch die in situ Messungen einen ausreichenden Abstand zwischen Zugspannung und Zugfestigkeit konstatierten, traten im Bauwerk vereinzelt Risse auf, die verpreßt werden mußten. Dies ist ein Indiz dafür, daß auch bei einer sehr geringen Zugbeanspruchung an Fehlstellen bzw. Unregelmäßigkeiten der Geometrie Risse ausgelöst werden können. Zudem spielte der sehr ungünstige Witterungsverlauf bei der betrachteten Bodenplatte eine entscheidende Rolle.

Da in [161] keine Angaben über Rißbreiten gemacht sind, beschränken sich die nachfolgenden Berechnungen auf die Temperaturentwicklung und die Spannungen im ungerissenen Zustand. Für die Nachrechnung der gemessenen Temperaturverläufe muß der gemessene Verlauf der Lufttemperatur durch einen mittleren Verlauf ersetzt werden (Abb. 8-6). Wie man aus der guten Übereinstimmung von Rechnung und Messung ersieht, spielen die tageszeitlichen Temperaturschwankungen für die Bauwerkstemperaturen offenbar nur eine untergeordnete Rolle. Die maximalen Abweichungen zwischen Rechnung und Messung betragen im Anfangsstadium etwa 5 K und liegen später bei 2 bis 3 K.

Für die Spannungsberechnung mußten der Materialparameter α_0 , der die Entwicklung des Elastizitätsmoduls beeinflußt, und die Kennwerte für den Kriechansatz und die Sauberkeitsschicht geschätzt werden, da hierüber keine Angaben vorlagen. Durch Vergleichsrechnungen wurde ein Parametersatz gefunden (Anhang A.2), bei dem die Spannungen in Querschnittsmitte den Meßergebnissen gut entsprechen. Allerdings werden damit die Spannungen am oberen und unteren Querschnittsrand nur näherungsweise richtig erfaßt (Abb. 8-6). Die Meßkurven der Randspannungen zeigen nach 3 bis 6 Tagen eine rückläufige Tendenz, während dieser Effekt bei den Rechenergebnissen erst nach etwa 10 Tagen eintritt. Die Abweichungen lassen sich besser analysieren, wenn man den Verlauf der Spannungen in einem Schnitt durch die Bodenplatte anträgt und wie in Abb. 8-7 dargestellt in die charakteristischen Anteile zerlegt (vgl. Abb. 7-1).

Nach einer Woche sind die gemessenen und errechneten Spannungen noch nahezu identisch. Nach 2 Wochen stellt man eine Diskrepanz fest, die fast ausschließlich durch den linearen Spannungsanteil bedingt ist (Abb. 8-7). Die Gründe für die Abweichung in der Größenordnung von 0.5 N/mm^2 können nicht eindeutig identifiziert werden. Der lineare Spannungsanteil läßt sich im wesentlichen auf die behinderte Verkrümmung infolge des linearen Temperaturgradienten zurückführen (vgl. Abb. 7-2). Bereits die erwähnte Differenz zwischen gemessener und gerechneter Temperatur von nur 2 bis 3 K bewirkt beim erhärteten Beton Spannungsänderungen in dieser Größenordnung. Aber auch ein linearer Feuchtegradient, der in der Rechnung nicht erfaßt wurde, beeinflusst im Bauwerk den linearen Spannungsgradienten. Außerdem haben Vergleichsrechnungen gezeigt, daß die Ergebnisse zum Teil sehr sensibel auf Veränderungen der Eingangsdaten für die E-Modul-Entwicklung und das Kriechen reagieren. Darüber hinaus kann die beobachtete Abweichung auch andere Ursachen im Rechenmodell oder in der Annahme der Materialparameter bzw. deren Homo-

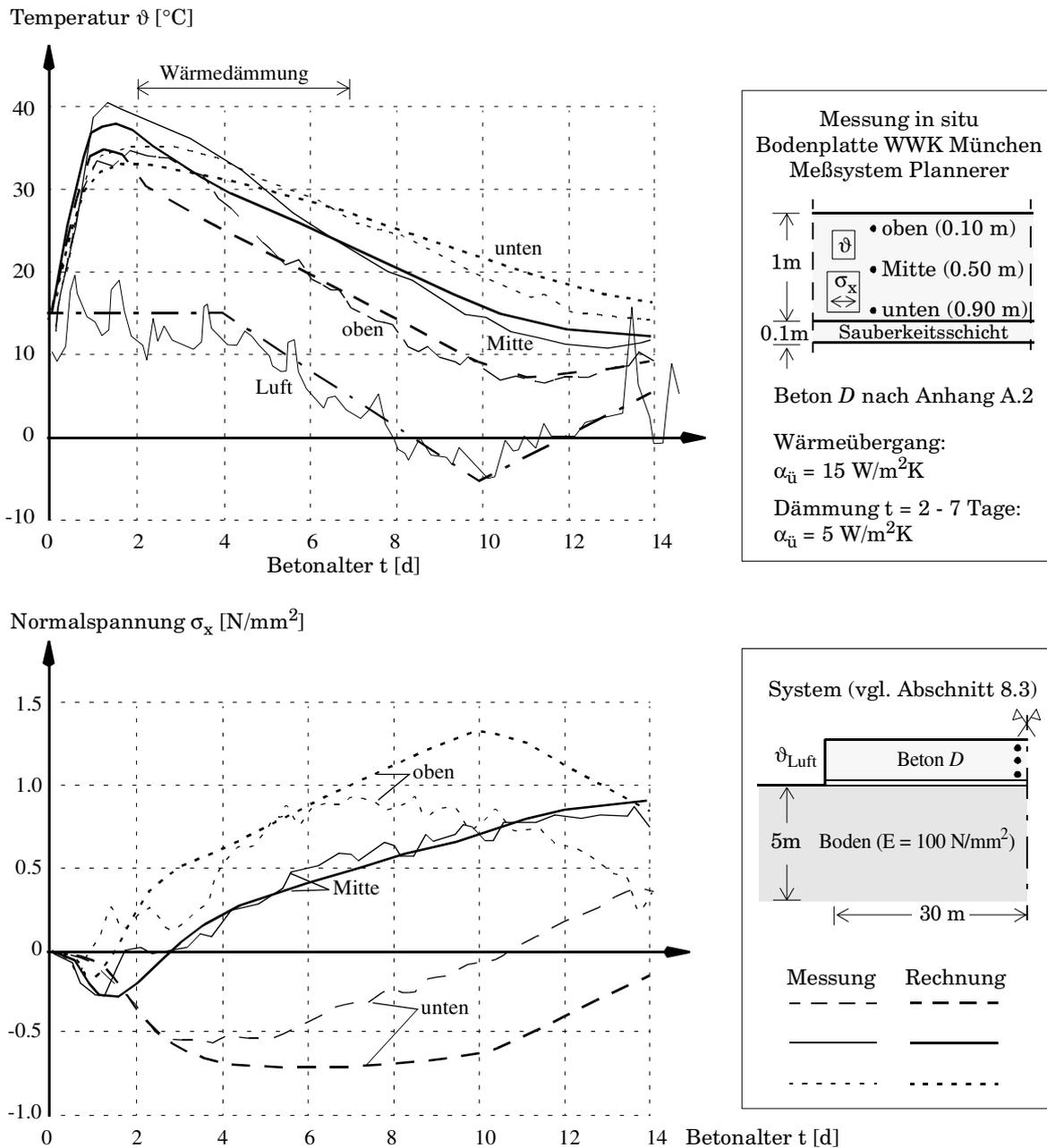


Abb. 8-6: Vergleich von Rechenergebnissen mit Messungen von Plannerer [161] (durchgeführt mit dem Stress-meter nach Plannerer).

genität haben. Auch eine Beeinflussung der Meßergebnisse durch eine Verkrümmung der Bodenplatte infolge von äußeren Einflüssen, die im Rechenmodell nicht erfaßt werden, ist nicht auszuschließen.

Für eine genauere Analyse wären weitere Versuche notwendig, bei denen alle für das Rechenmodell erforderlichen Parameter experimentell vorab bestimmt werden. Doch auch bereits aus den gezeigten Ergebnissen kann abgeleitet werden, daß das Rechenmodell im Rahmen der Genauigkeit der Eingangsparameter gute Ergebnisse liefert. Im Optimalfall liegen für das rechnerisch zu untersuchende Bauteil die experimentell bestimmten Modellparameter und zusätzlich Reißrahmenversuche

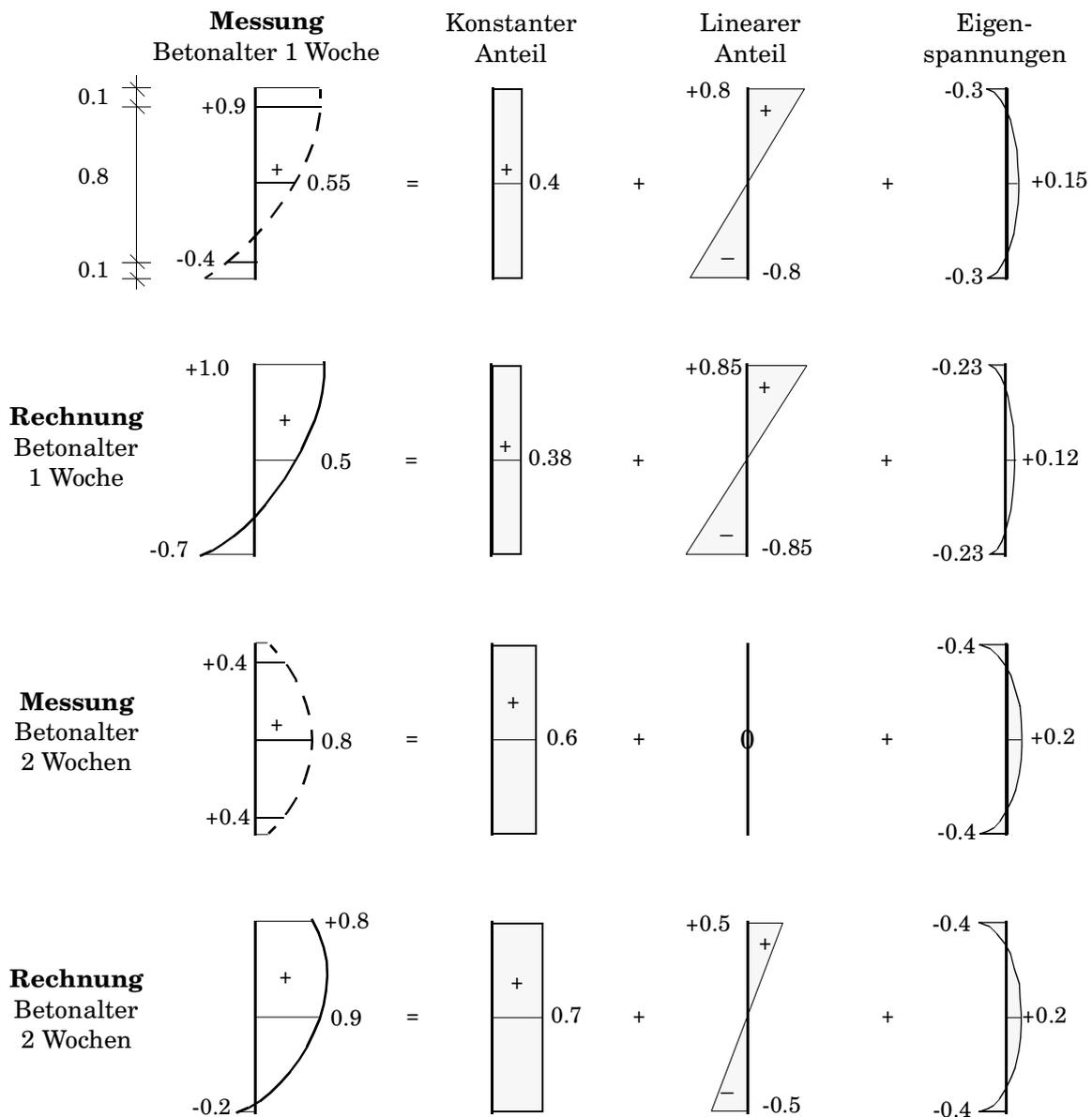


Abb. 8-7: Vergleich der gemessenen mit den errechneten Spannungsverläufen (vgl. Abb. 8-6).

zur Eichung des Rechenmodells vor. Da dies jedoch in der Regel nicht der Fall ist, muß die Sensibilität der Rechenergebnisse hinsichtlich der Eingangsparameter durchaus kritisch bewertet werden. Allerdings handelt es sich hierbei um eine physikalisch begründete Sensibilität, die weniger eine Schwäche des Rechenmodells, sondern charakteristisch für die realen nichtlinearen Systemantworten ist.

8.3 Verhalten am Plattenrand

8.3.1 System

Das gewählte System (Abb. 8-8) stellt einen Schnitt durch den Randbereich einer 1.1 m dicken Bodenplatte dar und wird als Scheibe im ebenen Verzerrungszustand berechnet (vgl. Abb. 8-1). Aufgrund der Symmetriebedingungen am rechten Systemrand entspricht das Modell einer Platte mit einer Ausdehnung der doppelten Systemlänge von 30 m. Betrachtet werden der unmittelbare Randbereich sowie die Entwicklung der Zustandsgrößen zur Plattenmitte hin. In Voruntersuchungen stellte sich heraus, daß mindestens das 25-fache der Plattendicke als Längenausdehnung diskretisiert werden muß, um einen Abschnitt zu erhalten, der ohne Störung vom Rand und vom Verformungsrupunkt der Symmetrieachse Auskunft über die Spannungsentwicklung auch bei längeren Bodenplatten gibt (vgl. Abschnitt 8.3.3.1).

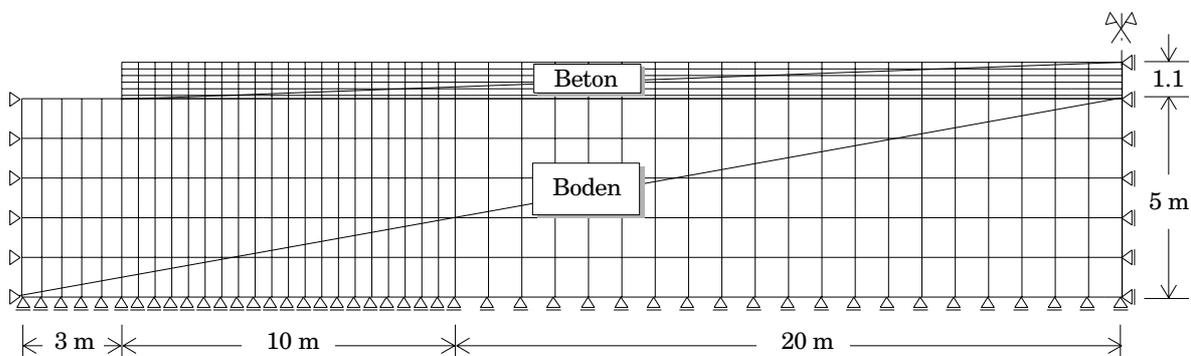


Abb. 8-8: System für die Berechnungen am Plattenrand.

8.3.2 Temperatur- und Hydratationsberechnung

Die Beton- und Bodenelemente erhalten eine Ausgangstemperatur von 15°C , was der angenommenen Lufttemperatur entspricht. In 5 m Tiefe unter der Bauwerkssohle wird ein konstanter Temperaturhorizont von ebenfalls 15°C angenommen, da anfängliche Berechnungen mit isolierten Rändern zu einer Überschätzung der Wärmespeicherung im Boden führten. Um einen ungünstigen Verlauf der Witterung zu simulieren, wird nach 8 Wochen, wenn die Temperaturveränderungen infolge Hydratation weitgehend abgeklungen sind, ein Abkühlen der Lufttemperatur auf 0°C simuliert. Das sich einstellende Temperaturgefälle in der Platte kann in der Spannungsberechnung auch näherungsweise als Ersatzlastfall für das Austrocknungsschwinden angesehen werden, da die Schwinddehnungen ebenfalls an der Luftseite am stärksten ausgeprägt sind.

Die Zeitschritte hatten im Anfangsstadium der Hydratation eine Länge von 2 Stunden, später konnten sie auf Tage und Wochen verlängert werden. Die Berechnungen wurden mit den Betonen *L1* und *R1* aus Anhang A.1 durchgeführt. Bei Beton *L1* handelt es sich um einen Laborbeton B 25 aus der Dissertation von Laube [126], bei Beton *R1* um einen im Hinblick auf zwangbeanspruchte Bauteile konzipierten WU-Beton B 35 nach [155]. Beide Betone wurden bereits von Huckfeldt [97] zur Untersuchung zwangbeanspruchter Betonbauteile herangezogen.

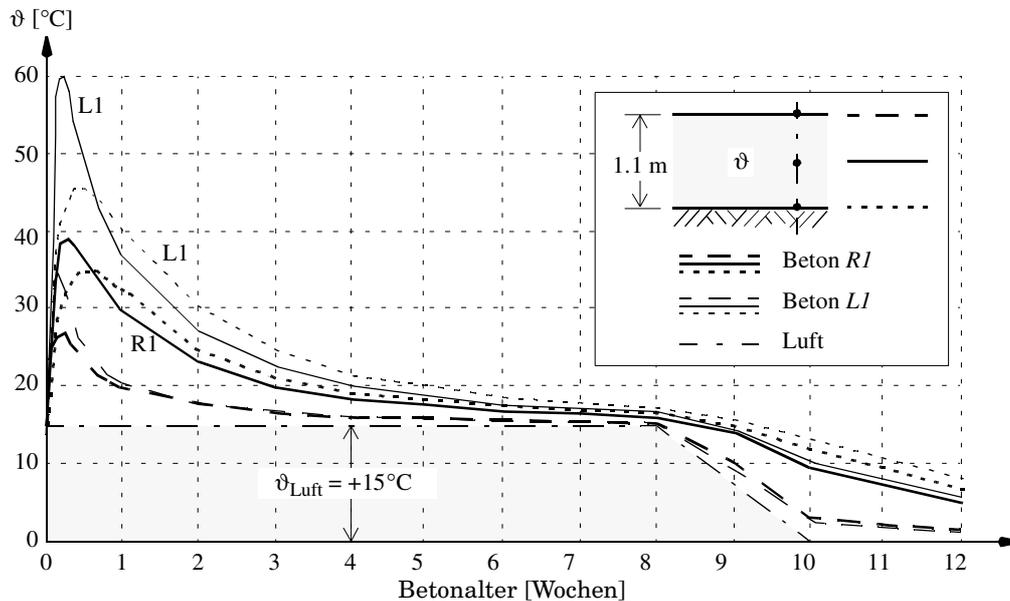


Abb. 8-9: Zeitliche Entwicklung der Temperatur für zwei verschiedene Betone *RI* und *LI* (vgl. Anhang A.1).

Die Ergebnisse sind in Abb. 8-9 als Verläufe über die Zeit dargestellt. Wie bereits aus den Untersuchungen zur Wärmefreisetzung in Kapitel 2 und Anhang B zu erwarten, entwickelt der Beton *LI* erheblich höhere Hydratationstemperaturen als der mit Hochofenzement hergestellte Beton *RI*. Innerhalb der ersten Woche wandert in beiden Fällen der wärmste Punkt von der Plattenmitte zur Unterseite. Ursache ist die Wärmespeicherung im Boden, die bei abklingender Hydratation als Wärmequelle wirkt. Beispielhaft ist in Abb. 8-10 die Verteilung der Temperatur und des Hydratationsgrades im System nach 2 Tagen dargestellt.

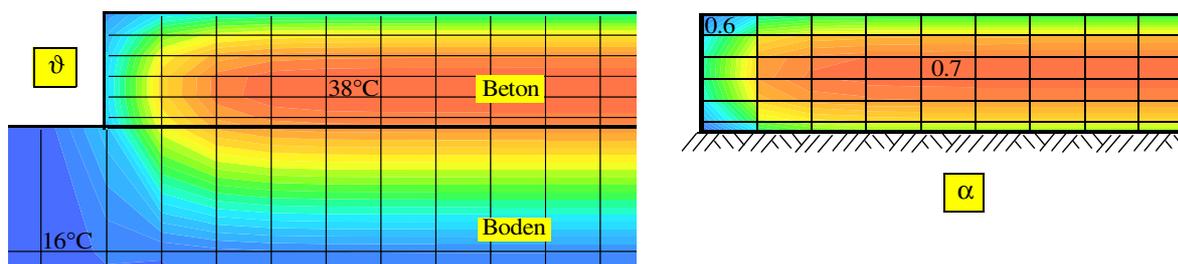


Abb. 8-10: Verteilung der Temperatur und des Hydratationsgrades nach 2 Tagen (Beton *RI*).

Ebenso wie die Temperatur weist auch der Hydratationsgrad bis auf einen kleinen Störbereich am linken Ende der Platte eine homogene Verteilung im System auf. Die luftseitige Betonfaser erhärtet etwas langsamer als die Plattenunterseite aufgrund der niedrigeren Temperaturen und des damit einhergehenden geringeren wirksamen Betonalters (vgl. auch Abb. 8-20).

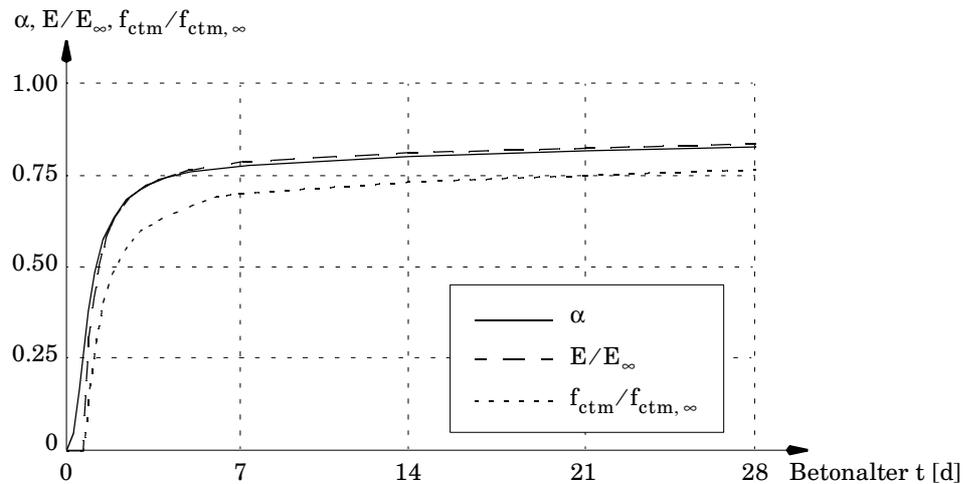


Abb. 8-11: Entwicklung des Hydratationsgrades und der mechanischen Parameter (Beton R1, Plattenmitte).

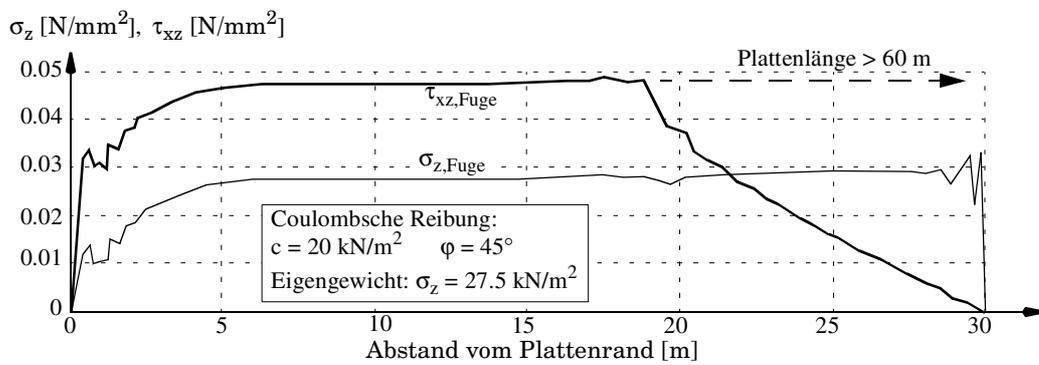
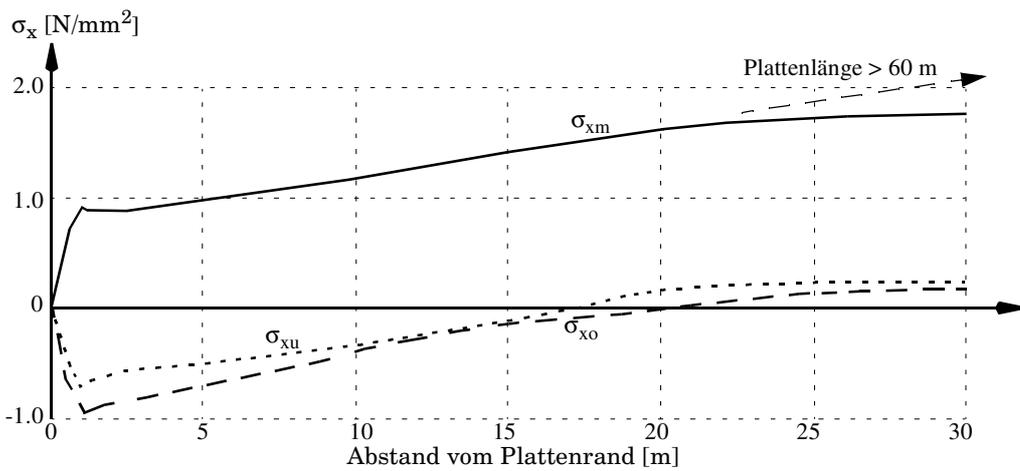
8.3.3 Spannungsberechnung

8.3.3.1 Aufbau der Zwangspannungen durch Bodenreibung

Aus Abb. 8-11 geht die Entwicklung der mechanischen Parameter hervor, die gemäß den in Kapitel 3 vorgestellten Modellen in Abhängigkeit des Hydratationsgrades angesetzt werden (Gleichungen (3.12), (3.19) und (3.25)). Der Ort der maximalen Beanspruchung liegt erwartungsgemäß am rechten Systemrand, wie der in Abb. 8-12 dargestellte Aufbau der Spannungen vom freien Plattenrand aus zeigt. Im direkten Zusammenhang mit dem Aufbau der Zwangspannungen steht der Verlauf der Schubspannungen in der Sohlfuge, der ebenfalls in Abb. 8-12 dargestellt ist. Man erkennt einen wenige Meter langen Störbereich am Plattenrand, innerhalb dessen die vertikale Sohlfugenpressung aus Eigengewicht durch die Tendenz der Platte, sich aus dem linearen Temperaturgradienten aufzuwölben, herabgesetzt ist. Demzufolge steigern sich auch die Schubspannungen in der Sohlfuge erst allmählich auf den Maximalwert. Danach stellt sich ein lineares Anwachsen der Zwangspannungen korrespondierend zu der konstanten Reibungskraft ein.

In etwa 10 m Entfernung vom rechten Systemrand beginnend, streben die Zwangspannungen einem Grenzwert zu. Dies rührt allerdings nicht daher, daß bereits die sogenannte kritische Plattenlänge erreicht wäre, bei der im Mittelbereich die vollen Zwangspannungen bei vollständiger Verformungsbehinderung auftreten. Die zugehörigen Spannungen lassen sich aus Gleichung (7.1) abschätzen. Sie liegen in aller Regel über der Betonzugfestigkeit und würden allein infolge Bodenreibung ohne Berücksichtigung von Eigenspannungen erst bei Platten mit mehr als 100 m Länge erreicht werden.

Die im Rechenmodell beobachtete Annäherung an einen Spannungsgrenzwert hängt mit dem symmetriebedingten Verformungsnullpunkt am rechten Systemrand zusammen und tritt bei allen Platten in ähnlicher Form auf. Aufgrund der Randbedingung, daß die horizontale Verschiebung in der Symmetrieachse zu Null werden muß, werden auch die Schubspannungen in der Sohlfuge Null. Im vorgestellten Beispiel sind erst in einem gewissen Abstand vom Ruhepunkt die Horizontalverschiebungen so groß, daß die maximale Reibungsspannung in der Sohlfuge aktiviert wird (Cou-



Störzone freier Rand ('Abheben')

Störzone Symmetrieachse (Ruhepunkt Plattenmitte)

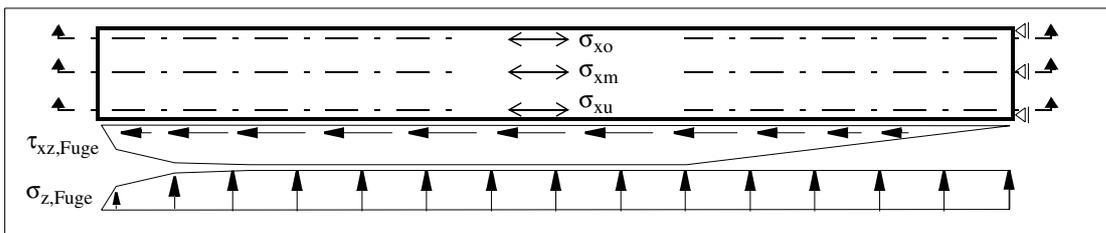
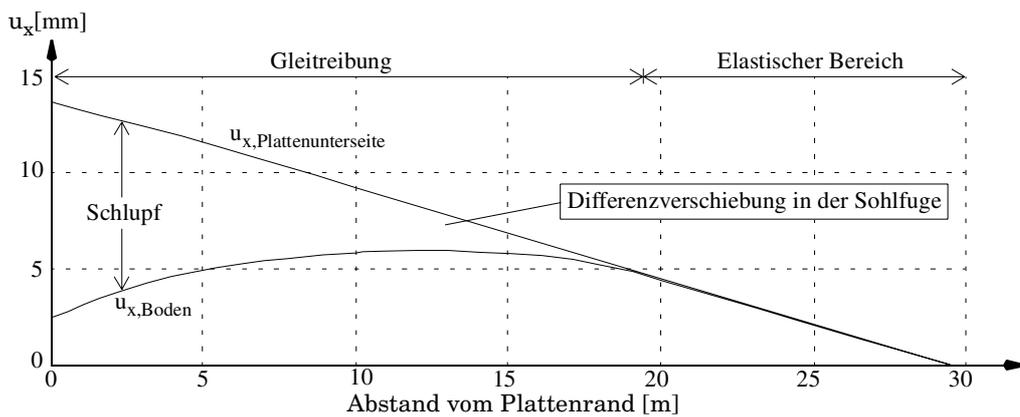


Abb. 8-12: Längsspannungen im Beton, Schubspannungen und Verschiebungen in der Sohlfuge.

lombsche Reibung). Dieser Abstand hängt wesentlich von der elastischen Schubsteifigkeit der Fuge bzw. der Interface-Elemente im Rechenmodell ab. Bei einer längeren als der berechneten Platte würde sich der Bereich mit konstanter Reibung und linearem Spannungsanstieg entsprechend verlängern, so daß aus Abb. 8-12 die entsprechenden Ergebnisse extrapoliert werden können. Aus dem Vergleich der Spannungen an den Querschnittsrändern mit dem Wert in Plattenmitte erkennt man, daß der Eigenspannungsanteil, abgesehen von einem kleinen Bereich am Plattenrand, nahezu konstant über die gesamte Plattenlänge bleibt. Die Bodenreibung betrifft fast ausschließlich den konstanten Spannungsanteil (vgl. Abb. 7-2, Seite 127).

8.3.3.2 Einfluß der Betonrezeptur

Vergleicht man die Entwicklung der Zugfestigkeit mit dem zeitlichen Verlauf der größten Zwangsspannungen am rechten Systemrand, so erkennt man, daß die Betonzugfestigkeit bei der berechneten 60 m langen Platte und Beton *RI* nicht erreicht wird (Abb. 8-13). Auch bei Beton *LI* erzeugt die abfließende Hydratationswärme Beanspruchungen, die zwar kleiner als die mittlere Betonzugfestigkeit sind, jedoch einen unteren Fraktilwert bereits überschreiten können. Durch die Absenkung der Außentemperatur wird auch die mittlere Betonzugfestigkeit erreicht. Da der Anteil der Bodenreibung an den Zwangsspannungen beider Betone keine wesentlichen Unterschiede aufweist, rührt die Differenz, die letztendlich über die Rißbildung entscheidet, aus den Biege- und Eigenspannungen her, die durch den Temperaturgradienten verursacht werden.

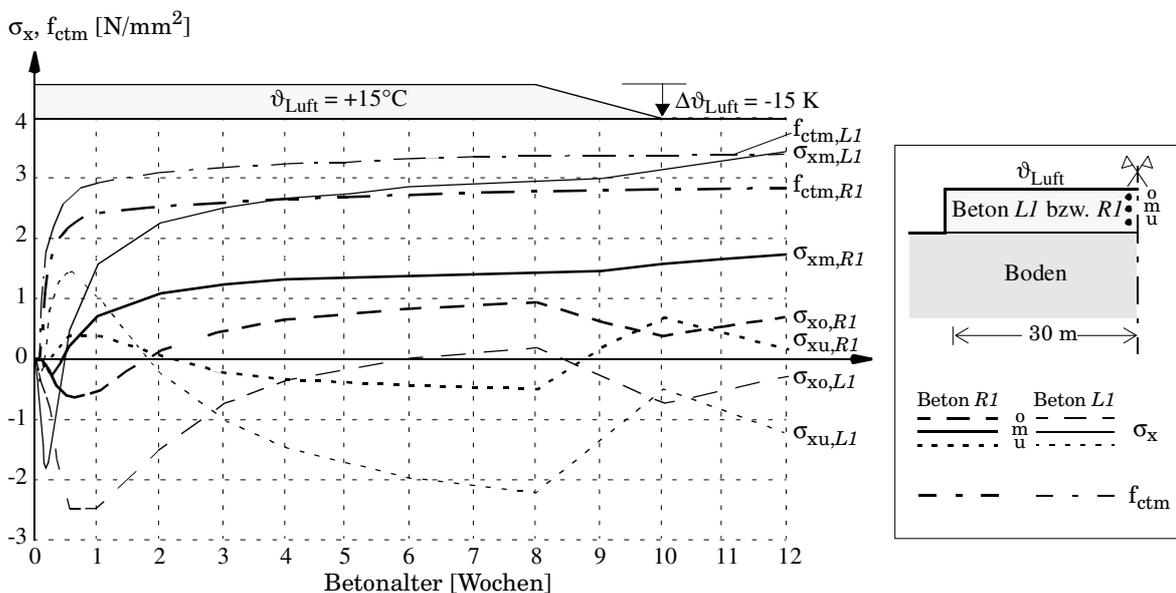


Abb. 8-13: Entwicklung der Längsspannungen in der Symmetrieachse für die Betone *RI* und *LI*.

Abb. 8-14 zeigt die Aufteilung der Spannungen im Schnitt der Symmetrieachse in einen konstanten und linearen Spannungsanteil sowie einen parabolischen Eigenspannungsanteil. Die Darstellung führt deutlich den geringen Einfluß der Bodenreibung (konstanter Anteil) und den maßgeblichen Einfluß des parabolischen Spannungsanteils vor Augen, der aus dem nichtlinearen Temperaturgradienten resultieren. Folglich ist für die Strategie der Rißvermeidung eine günstige Beeinflussung des Temperaturgradienten entscheidend, was im wesentlichen durch eine Betonrezeptur mit geringer

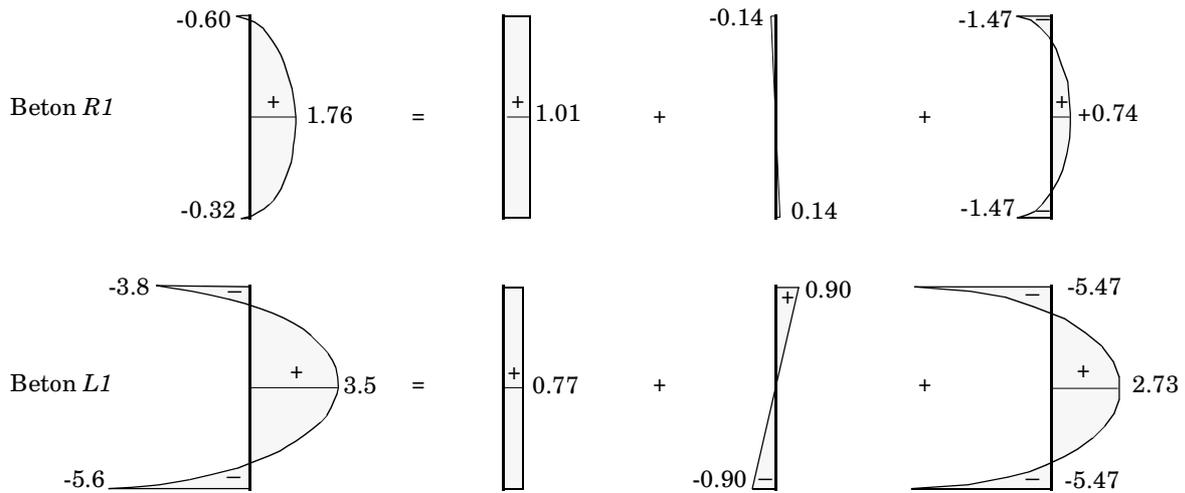


Abb. 8-14: Zerlegung der Spannungen σ_x [N/mm²] in der Symmetrieachse in einen konstanten, linearen und parabolischen Anteil (Plattendicke 1.10 m, Betonalter $t = 12$ Wochen).

Wärmeentwicklung und durch geeignete Nachbehandlungsmaßnahmen erreicht werden kann [135]. Die Simulation verschiedener äußerer Einflußfaktoren auf den Temperaturverlauf, wie z.B. das zeitweise Aufbringen einer Wärmedämmung oder andere Wärmeübergangsbedingungen bei höheren Windgeschwindigkeiten, ergab im Vergleich zum Einfluß der Betonrezeptur nur relativ geringfügige Änderungen im Spannungsverlauf.

8.3.3.3 Einfluß der Sohlfugenausbildung

Die Schubspannungen in der Sohlfuge, die über Coulombsche Reibung aktiviert werden und durch eine Behinderung der Verkrümmung zum konstanten Zwangspannungsanteil führen, sind primär von der Beschaffenheit der Sohlfuge abhängig. Deshalb werden verschiedene Varianten untersucht, die in Abb. 8-15 gegenübergestellt sind.

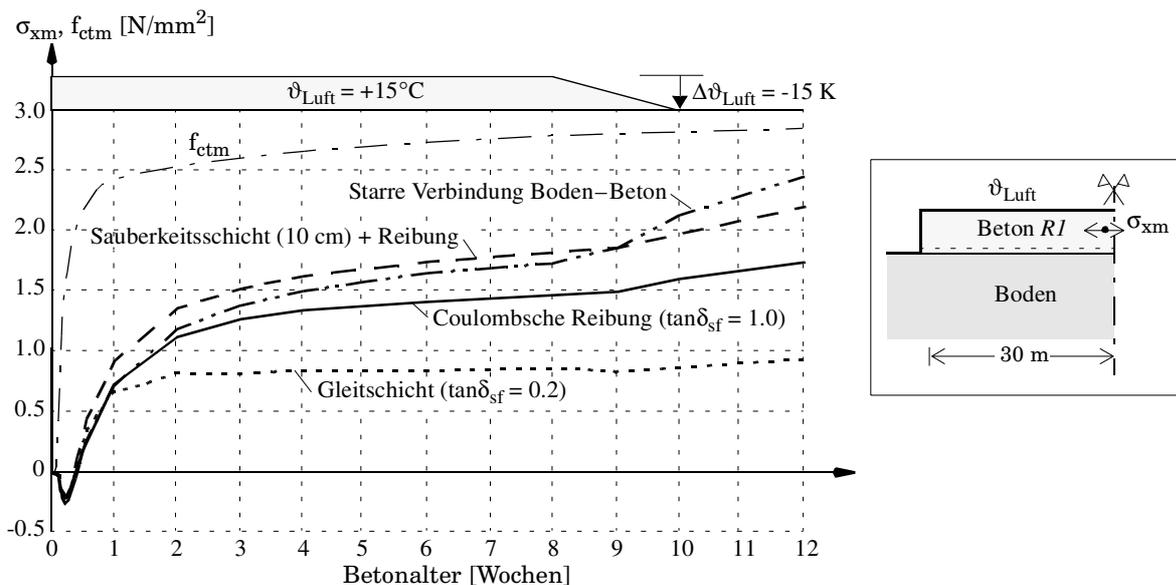


Abb. 8-15: Einfluß unterschiedlicher Sohlfugenausbildungen.

Durch den Einsatz einer Gleitschicht (Kohäsion $c = 2 \text{ kN/m}^2$, $\tan \delta_{sf} = \mu = 0.2$) können die Spannungen reduziert werden. Wird unterstellt, daß die Bodenplatte mit dem Untergrund starr gekoppelt ist, ergeben sich höhere Spannungen, die jedoch aufgrund der Nachgiebigkeit des Bodens die Betonzugfestigkeit ebenfalls nicht erreichen. Ähnliche Verhältnisse stellen sich ein, wenn die Platte mit einer Sauberkeitsschicht erstellt wird, die sich ebenfalls verformungsbehindernd auswirkt. Der Einfluß der Sohlfugenausbildung ist bezogen auf die dargestellten maximalen Zugspannungen im Querschnitt relativ gering, Bezogen auf den konstanten Spannungsanteil (Abb. 8-14) sind die Veränderungen dagegen beträchtlich.

8.3.3.4 Einfluß der Plattendicke

Um den Einfluß der Plattendicke zu untersuchen, wird das System aus Abb. 8-8 auch mit doppelter bzw. halbiertes Plattendicke gerechnet. Da die Elemententeilung gleich bleibt, ergeben sich bei der halben Dicke Elemente, die ein ungünstiges Seitenverhältnis haben. Die Rechenergebnisse zeigen jedoch, daß sich keine nennenswerten Diskretisierungsfehler ergeben, da die Elementgeometrie streng rechteckig und die Spannungsgradienten in Längsrichtung klein sind. Bei der doppelten Plattendicke entsteht aufgrund der in Abschnitt 8.3.3.1 geschilderten Zusammenhänge eine Überschneidung des Störbereichs am Plattenrand mit dem Bereich abfallender Schubspannungen in Plattenmitte.

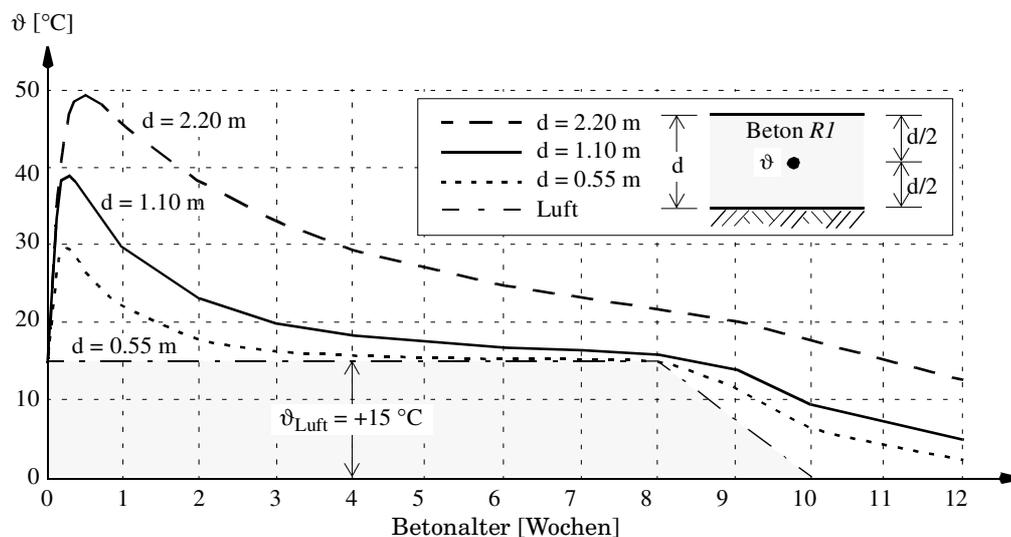


Abb. 8-16: Einfluß der Plattendicke auf die Temperaturentwicklung.

Betrachtet man die Maximaltemperaturen in Plattenmitte (Abb. 8-16), so erkennt man den maßgeblichen Einfluß der Plattendicke auf den Temperaturverlauf. Das hohe Wärmespeichervermögen der dicken Platte führt dazu, daß die Temperatur im Platteninneren nach 8 Wochen immer noch um etwa 5 K über der Ausgangs- und Außentemperatur liegt und Veränderungen der Umgebungstemperatur nur sehr langsam Wirkung im Inneren zeigen.

Schon allein der stark veränderte Temperaturverlauf bewirkt einen gänzlich unterschiedlichen Spannungsverlauf bei Platten unterschiedlicher Dicke. Zudem ändert sich auch das Eigengewicht

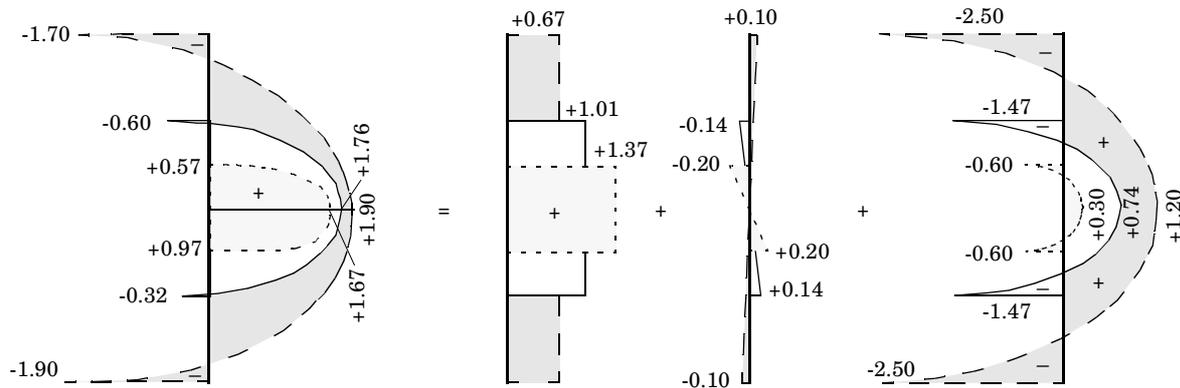


Abb. 8-17: Einfluß der Plattendicke auf die Spannungen in der Symmetrieachse nach 12 Wochen.

und demzufolge die übertragbare Schubspannung in der Sohlfuge bei Coulombscher Reibung. Wie Abb. 8-17 zeigt, führt der Temperaturgradient über die Plattendicke insbesondere zu einer erheblichen Vergrößerung der Eigenspannungen. Der zentrische Spannungsanteil, der sich aus der Bodenreibung in Verbindung mit der Verkrümmungsbehinderung ergibt, ist bei dicken Platten geringer als bei dünnen. Dies stellt keinen Widerspruch zu der oben geschilderten Zunahme der Reibungsspannungen dar, da sich zwar eine höhere resultierende Normalkraft, jedoch durch die größere Dicke eine geringere Normalspannung ergibt. Diese Zusammenhänge bewirken, daß die für die Rißbildung maßgebende größte Zugspannung in Plattenmitte nur im geringen Maße mit der Plattendicke anwächst. Allerdings ist – wie bei allen in diesem Abschnitt dargestellten Ergebnissen – eine Verallgemeinerung dieser Aussage nicht ohne weiteres möglich, da Veränderungen der Randbedingungen und insbesondere der Betonrezeptur fallweise sehr unterschiedliche Resultate hervorrufen können.

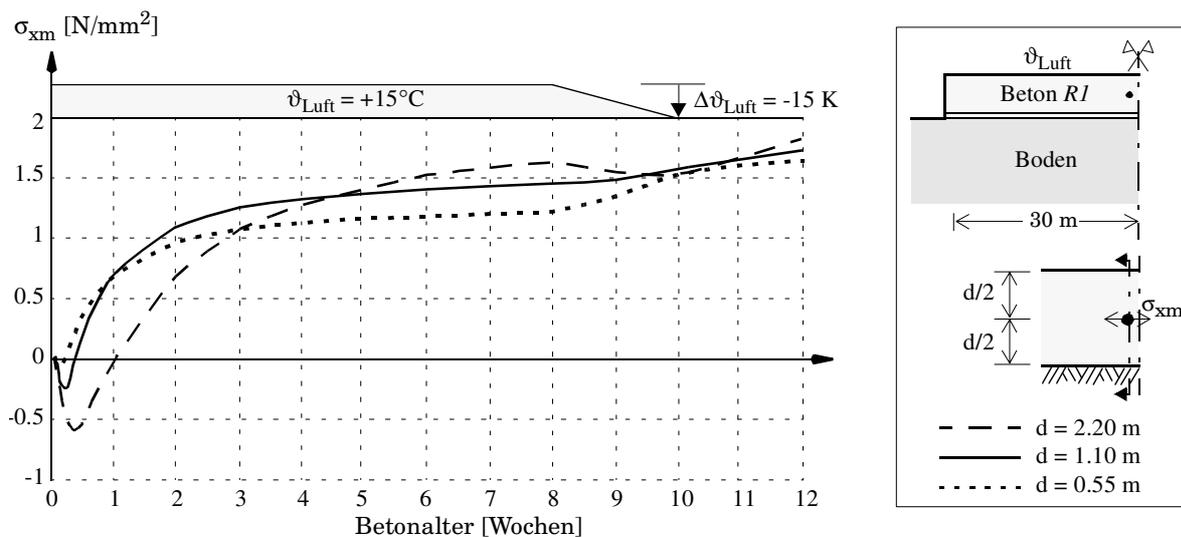


Abb. 8-18: Einfluß der Plattendicke auf die maximalen Spannungen in Plattenmitte.

8.4 Verhalten im Inneren der Bodenplatte

8.4.1 System

Eine hundertprozentige Verformungsbehinderung stellt sich nur im Inneren von Bodenplatten mit weit mehr als 100 m Länge ein. Derartig große Systeme sind auch für heutige Rechner bei Einsatz nichtlinearer Berechnungsverfahren kaum zu realisieren. Bei baupraktischen Bodenplatten treten jedoch durch die Sauberkeitsschicht, durch Dickensprünge oder Unebenheiten der Sohlfuge Verformungsbehinderungen auf, die bereits bei kürzeren Bauabschnitten zu einem nahezu vollständigen Zwang im Inneren führen können. Deshalb wird im folgenden als Grenzfall ein vollständig verformungsbehinderter Systemausschnitt aus dem Platteninneren einer 1 m dicken Platte (Beton $R1$) mit 5 cm Sauberkeitsschicht betrachtet. Die Randbedingungen dieses Ausschnittes stellen Symmetriebedingungen dar, so daß genaunommen ein immer wiederkehrender Ausschnitt einer unendlich langen Platte modelliert wird. Der erste Riß wird am linken Systemrand durch Interface-Elemente vertikal über die gesamte Systemhöhe ermöglicht. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften stellt die Länge des Systemausschnittes den halben Abstand der ersten Risse dar. In Abb. 8-19 ist das größte untersuchte System mit 4 m Länge als FE-Diskretisierung dargestellt. In einem ähnlich aufgebauten 2 m langen System werden zusätzlich Interface-Elemente am rechten Rand und in Systemmitte angeordnet, so daß Rißabstände von 4 m bis 1 m simuliert werden können. Durch eine geringfügig niedrigere Zugfestigkeit am linken Rand wird dort der Beginn der Rißbildung vorgegeben.

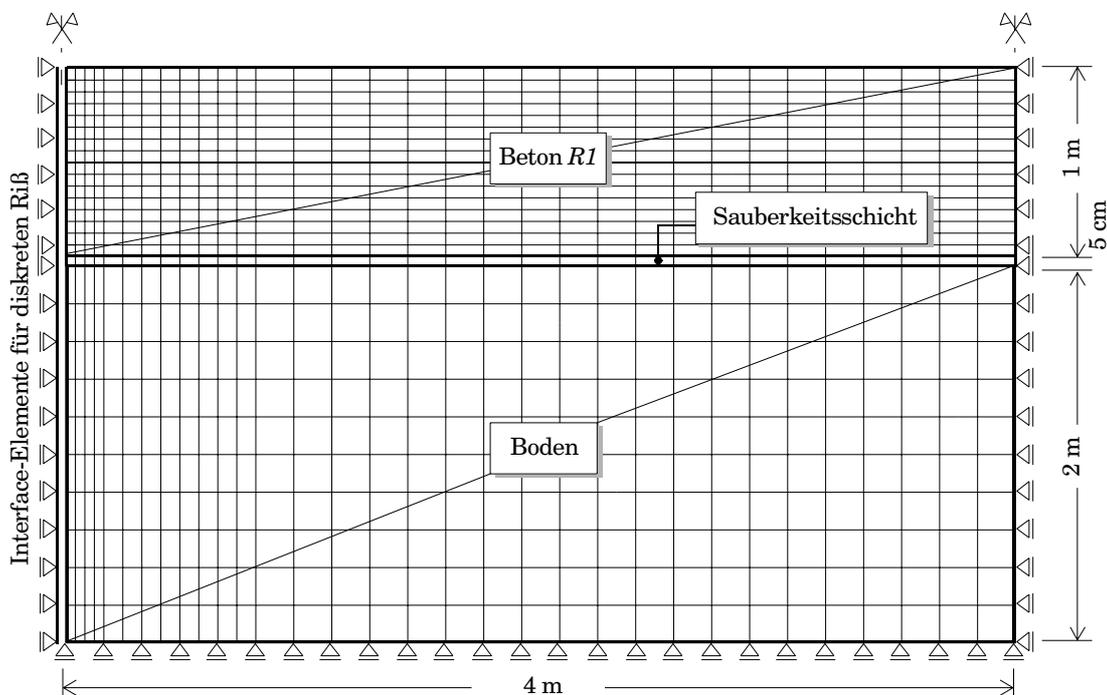


Abb. 8-19: System für die Berechnungen im Platteninneren (vorgegebener Rißabstand 8 m).

8.4.2 Temperatur- und Hydratationsgradberechnung

Die Temperaturberechnung wird unter denselben Randbedingungen wie am Plattenrand (Abschnitt 8.3) durchgeführt. Über den gesamten betrachteten Zeitraum stellt sich im Platteninneren eine Verteilung von Temperatur- bzw. Hydratationsgrad ein, die nur über die Plattendicke variiert, über die Länge jedoch konstant bleibt. Es genügt deshalb, einen vertikalen Schnitt durch das System zu betrachten. Für charakteristische Punkte ist in Abb. 8-20 der zeitliche Verlauf der Temperatur und des Hydratationsgrades dargestellt. Während die Entwicklung des Hydratationsgrades keine großen Unterschiede innerhalb der Platte aufweist, stellen sich erhebliche Temperaturgradienten über die Plattendicke ein. Diese unterschiedliche Temperaturentwicklung ist für die Eigenspannungen verantwortlich, die maßgeblichen Einfluß auf den Zeitpunkt der Rißbildung haben.

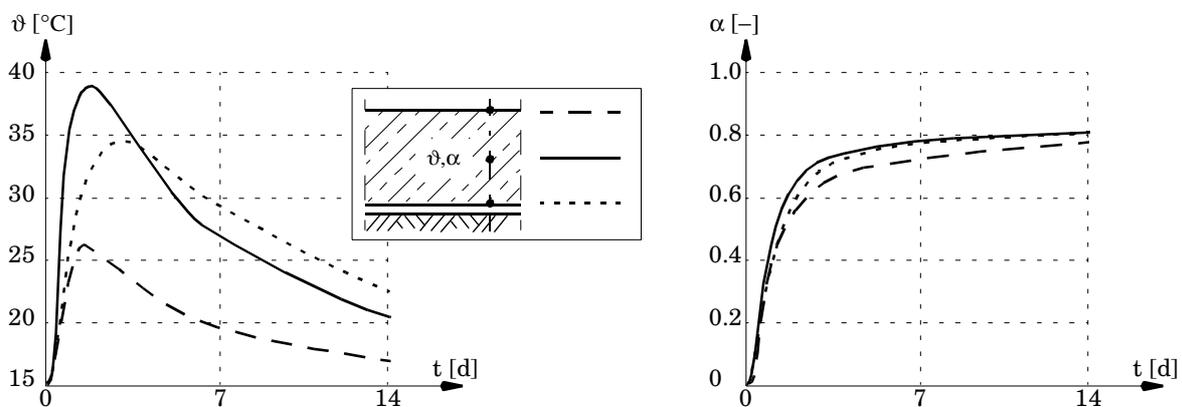


Abb. 8-20: Zeitliche Entwicklung von Temperatur und Hydratationsgrad in den ersten 14 Tagen.

8.4.3 Ungerissener Zustand

Um die Entwicklung der Spannungen bei vollem Zwang zu studieren, wird zunächst der Fall ohne Rißbildung untersucht. Ähnlich wie bei der Temperatur und beim Hydratationsgrad stellt sich ein eindimensionaler Zustand ein, so daß es wiederum genügt, nur einen Schnitt durch das System zu betrachten. Für jeweils einen Punkt am oberen und unteren Rand der 1 m dicken Platte sowie für die mittlere Faser ist in Abb. 8-21 die Entwicklung der vollen Zwangspannung in x-Richtung der Zugfestigkeitsentwicklung gegenübergestellt. Man erkennt, daß sich die Zugfestigkeit in der Plattenmitte zwar am schnellsten entwickelt, daß jedoch auch die Zwangspannungen dort am schnellsten anwachsen. Dies führt dazu, daß sich bei den untersuchten Bedingungen der erste Riß durch ein Zugversagen in der Plattenmitte etwa nach 10 Tagen bei einer mittleren Zugfestigkeit von ca. 2.3 N/mm^2 lokalisiert. Sobald an einer Stelle im Querschnitt die Zugfestigkeit überschritten wird, öffnet sich der Riß reiðverschlusartig über den gesamten Querschnitt.

8.4.4 Rißbildung ohne Bewehrung

Wird bei einer unbewehrten Bodenplatte die Zugfestigkeit überschritten, so entsteht ein sehr breiter Rið, und es stellen sich ab dem Riðzeitpunkt ähnliche Verhältnisse wie am Plattenrand ein. Ohne Sauberkeitsschicht würde nur die Bodenreibung zu einem allmählichen Aufbau von Zwangspannun-

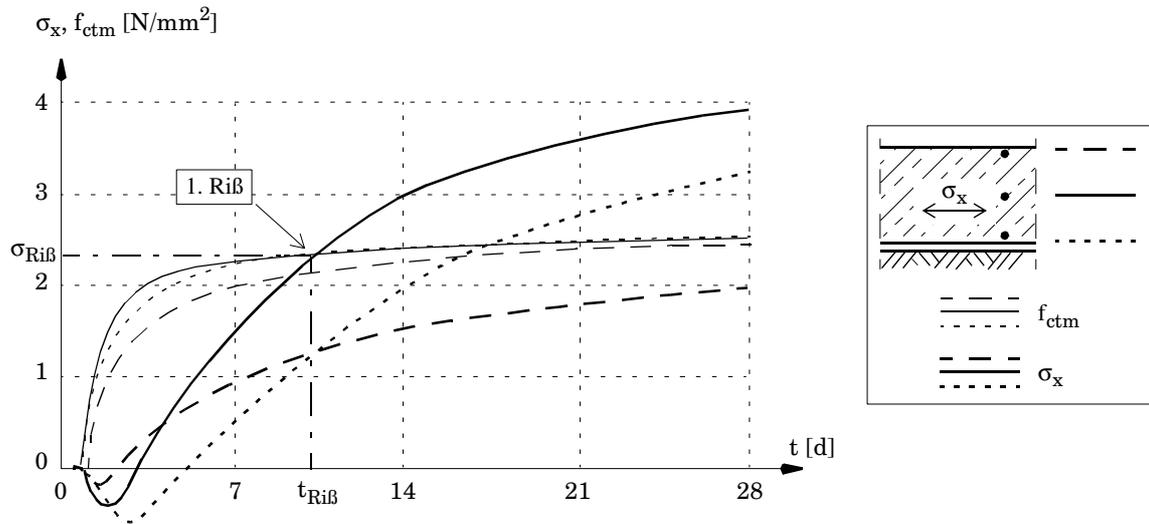


Abb. 8-21: Zeitliche Entwicklung von Zugfestigkeit und voller Zwangspannung in den ersten 14 Tagen.

gen ausgehend vom Riß führen, und es würde sich der überwiegende Teil der Temperaturdehnungen im Riß lokalisieren. Ist eine Sauberkeitsschicht vorhanden, so hat diese eine verformungsbehindernde und damit rißbreitenbeschränkende Wirkung. Da sie annähernd dieselbe Temperaturgeschichte erfährt wie die unterste Betonfaser, ist der Effekt jedoch relativ gering (Abb. 8-22).

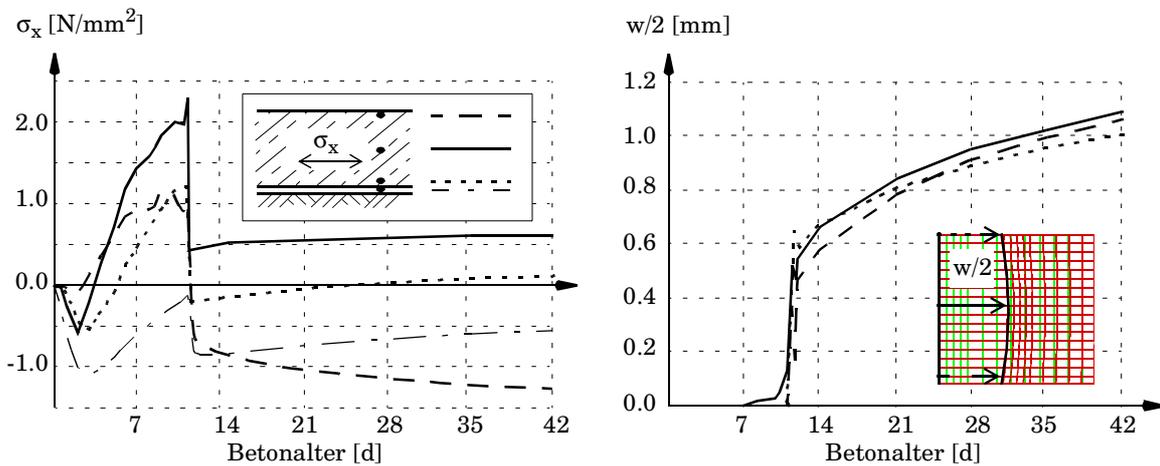


Abb. 8-22: Entwicklung der Zwangspannungen und der halben Rißbreite ohne Bewehrung (Rißabstand 8 m).

Das gerechnete System entspricht aufgrund seiner Symmetrieeigenschaft einer unendlich langen Bodenplatte mit Rissen im Abstand von 8 m. Man erkennt, daß die Zugspannungen nach dem Öffnen des ersten Risses nicht mehr die Größenordnung der Zugfestigkeit erreichen. Der zu erwartende Rißabstand ohne Bewehrung liegt folglich bei mehr als 8 m.

8.4.5 Einfluß der Bewehrung

8.4.5.1 Berechnungen mit vorgegebenem Rißabstand

Die Bodenplatte wird nun oben und unten mit jeweils $50 \text{ cm}^2/\text{m}$ ($\text{Ø}25/10$) bewehrt, was einem geometrischen Bewehrungsprozentsatz von 1 % entspricht. Die Bewehrung bewirkt, daß der Abbau der Zwangspannungen durch den ersten Riß weitaus geringer ausfällt, als bei der unbewehrten Platte. Dies führt schon bald nach der Rißbildung zu einem erneuten Überschreiten der Betonzugfestigkeit durch die fortschreitende Abkühlung. Bei den Ergebnissen in Abb. 8-23 und 8-24 wird zunächst nur ein Riß am linken Systemrand zugelassen.

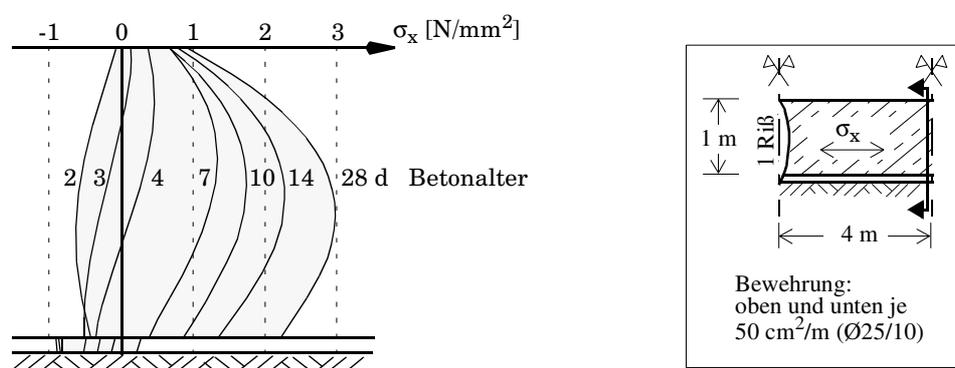


Abb. 8-23: Verlauf der Zwangspannungen über die Dicke (Schnitt am rechten Systemrand, Rißabstand 8 m).

Abb. 8-23 zeigt die Entwicklung der Zwangspannungen über die Querschnittshöhe am gegenüberliegenden Systemrand. Sowohl der erste Riß nach 10 Tagen wie auch der nächste Riß nach etwa 14 Tagen werden durch ein Überschreiten der Betonzugfestigkeit etwa in Querschnittsmitte initiiert. Man erkennt aus Abb. 8-23 auch, daß eine Zerlegung der Zwangspannungen in einen konstanten, linearen und parabolischen Anteil nicht immer ausreichend ist, um z.B. den s-förmigen Spannungsverlauf nach 4 Tagen zu beschreiben.

Der Rißverlauf, der in Abb. 8-24 nach 28 Tagen graphisch dargestellt ist, zeigt eine deutlich parabolische Form, welche durch die Zugkräfte der Bewehrung am oberen und unteren Querschnittsrand hervorgerufen wird. Die maximale Rißbreite stellt sich in Querschnittsmitte ein. Für die Anforderung an die Wasserdichtheit und für den Korrosionsschutz der Bewehrung ist jedoch die Rißbreite am Querschnittsrand entscheidend, welche deutlich kleinere Werte aufweist.

8.4.5.2 Berechnungen mit variablem Rißabstand

Da das bisher verwendete System mit einer Länge von 4 m zu sehr hohen Rechenzeiten führt und bereits gezeigt wurde, daß nach dem ersten Riß (Rißabstand 8 m) sehr schnell ein weiterer Riß entsteht, wird im folgenden mit einem analog aufgebauten, halb so langen System gerechnet. In diesem System sind mehrere Interface-Reihen integriert, so daß sich die Rißabstände variabel ausbilden können. Der erste Riß im FE-System, der durch eine geringfügig abgeminderte Zugfestigkeit am linken Rand vorgegeben wird, entspricht aufgrund der Symmetrieeigenschaften einem regelmäßigen Rißmuster mit 4 m Raster. Der nächste Riß bildet sich am rechten Rand des FE-Systems, also in der

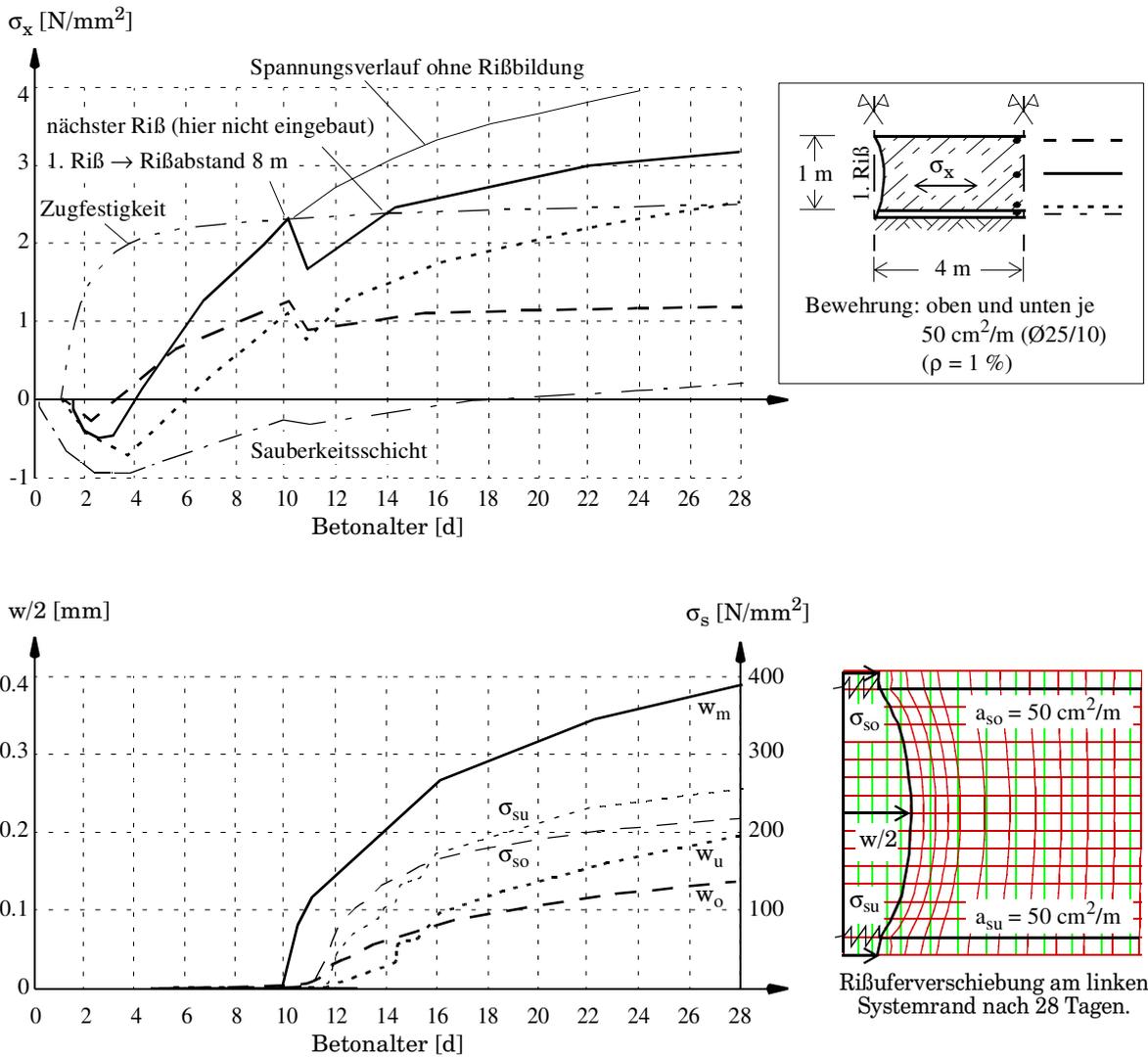


Abb. 8-24: Entwicklung der Zwangspannungen, Rißbreiten und Stahlspannungen im Riß (Rißabstand 8 m).

Mitte der ersten Risse, so daß nach zwei Rissen ein Rißabstand von 2 m vorliegt. Bei einigen der untersuchten Bewehrungsvarianten kommt es zu einer nochmaligen Halbierung des Rißabstandes, also zu einem Rißabstand von 1 m. Danach ist bei allen Rechnungen die Zwangursache soweit abgebaut, daß sich keine neuen Risse mehr bilden. Trotzdem ist noch nicht der Zustand des abgeschlossenen Rißbildes erreicht, d.h. zusätzliche äußere Lasten können zu einem weiteren Riß führen.

In Abb. 8-25 sind die Ergebnisse bei einer Bewehrung oben und unten mit jeweils 50 cm²/m (Ø25/10) dargestellt. Infolge abfließender Hydrationswärme ergibt sich lediglich ein Riß am linken Systemrand (Rißabstand 4 m). Erst durch Absenken der Außentemperatur zwischen der 8. und 10. Woche wird die Betonzugfestigkeit erneut überschritten. Dies ist ein Beispiel dafür, wie die Überlagerung mit Schwinden oder mit äußeren Einflüssen relativ spät zu weiteren Rissen führen kann, deren Ursache zu einem Großteil auf hydrationsbedingte Zwangspannungen zurückzuführen ist.

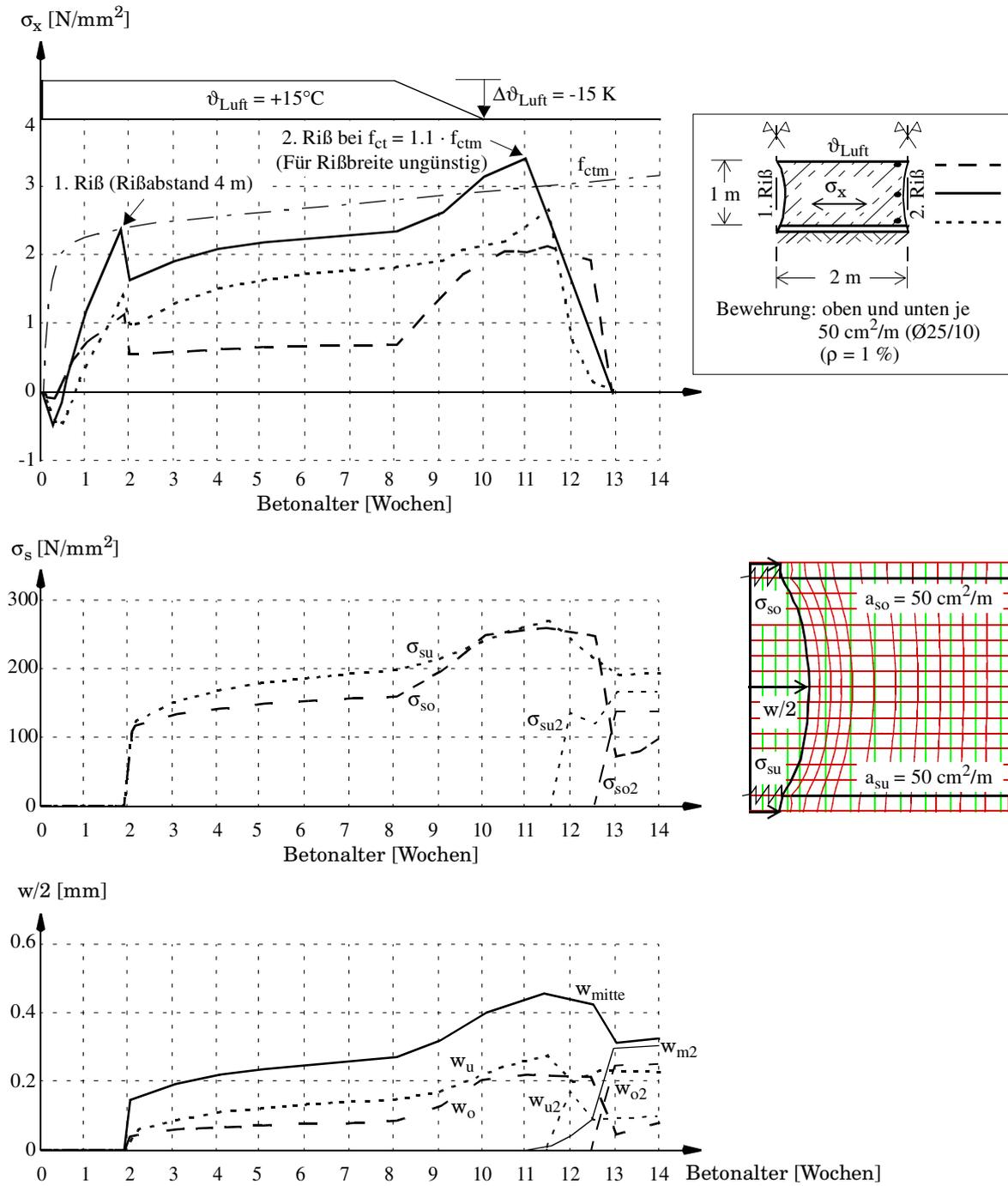


Abb. 8-25: Entwicklung der Zwangspannungen, Rißbreiten und Stahlspannungen im Riß.

8.4.5.3 Einfluß der Bewehrungsmenge und des Stabdurchmessers

Um den Einfluß der Bewehrungsmenge und des Stabdurchmessers zu untersuchen, wird das gleiche System mit verschiedenen Bewehrungsvarianten gerechnet. Die Ergebnisse in Abb. 8-26 zeigen, daß die Halbierung der Bewehrungsmenge bei gleichem Durchmesser zu größeren Rißbreiten führt,

wobei ein konstanter Faktor von ca. 1.5 über die gesamte Lastgeschichte beobachtet werden kann. Die Steigerung der Stahlspannung fällt insbesondere bei höheren Lasten aufgrund der Nichtlinearität etwas geringer aus. Trotz höherer Stahlspannungen ist die resultierende Kraft geringer, die bei verringerter Bewehrungsmenge über den Riß übertragen wird, so daß nunmehr die Betonzugfestigkeit auch bei einer Absenkung der Außentemperatur um 15 K nicht mehr erreicht wird.

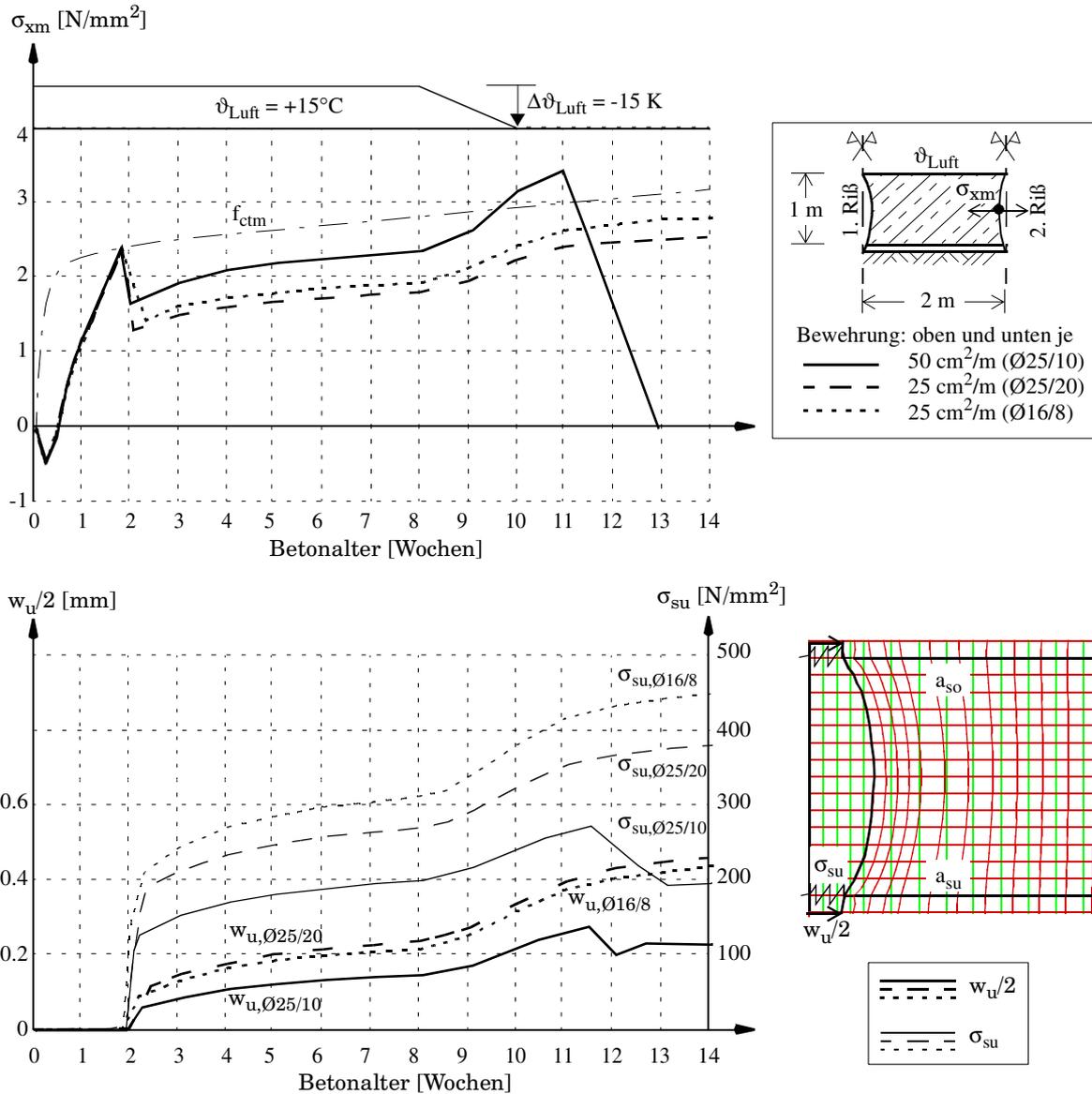


Abb. 8-26: Einfluß von Bewehrungsdurchmesser und Bewehrungsmenge auf Spannungen und Rißbreiten.

Reduziert man den Stabdurchmesser von 25 mm auf 16 mm, so führt dies erwartungsgemäß zu einer Verringerung der Rißbreiten und zu höheren Stahlspannungen aufgrund des besseren Verbundes. Allerdings ist die Wirkung absolut gesehen relativ gering, da der bessere Verbund in diesem Beispiel noch nicht zur Bildung eines weiteren Risses und damit zu einer weiteren Reduzierung des Rißabstandes ausreicht.

8.4.5.4 Variation der Bewehrungsanordnung

In der Praxis wird bei zwangbeanspruchten Betonbauteilen, welche infolge Bodenreibung verformungsbehindert sind, die Bewehrung oft ungleichmäßig über den Querschnitt angeordnet. Hintergrund ist zum einen die Überlegung, die Resultierende der Zwangspannungen gezielter abzudecken, wenn der lineare Zwangspannungsanteil vorherrscht. Zum anderen kann unter Umständen die günstige Wirkung der Verformungsbehinderung zur Reduzierung der unten liegenden Bewehrung genutzt werden. Obwohl die festgestellten Zwangspannungen über den Querschnitt nur einen geringen linearen Anteil besitzen, und die Dicke der Sauberkeitsschicht von 5 cm zu gering ist, um wesentlich zur Rißbreitenbeschränkung beizutragen, werden trotzdem zwei Variationen der Bewehrungsanordnung untersucht. Gegenüber der bisherigen Gleichverteilung auf zwei Lagen, wird der Extremfall von nur einer Lage an der Oberseite ($50 \text{ cm}^2/\text{m} - \text{Ø}25/10$) und die Zwischenlösung einer 2:1 Verteilung mit einer stärkeren oberen Lage ($50 \text{ cm}^2/\text{m} - \text{Ø}25/10$) und einer schwächeren unteren Lage ($25 \text{ cm}^2/\text{m} - \text{Ø}25/20$) studiert (Abb. 8-27).

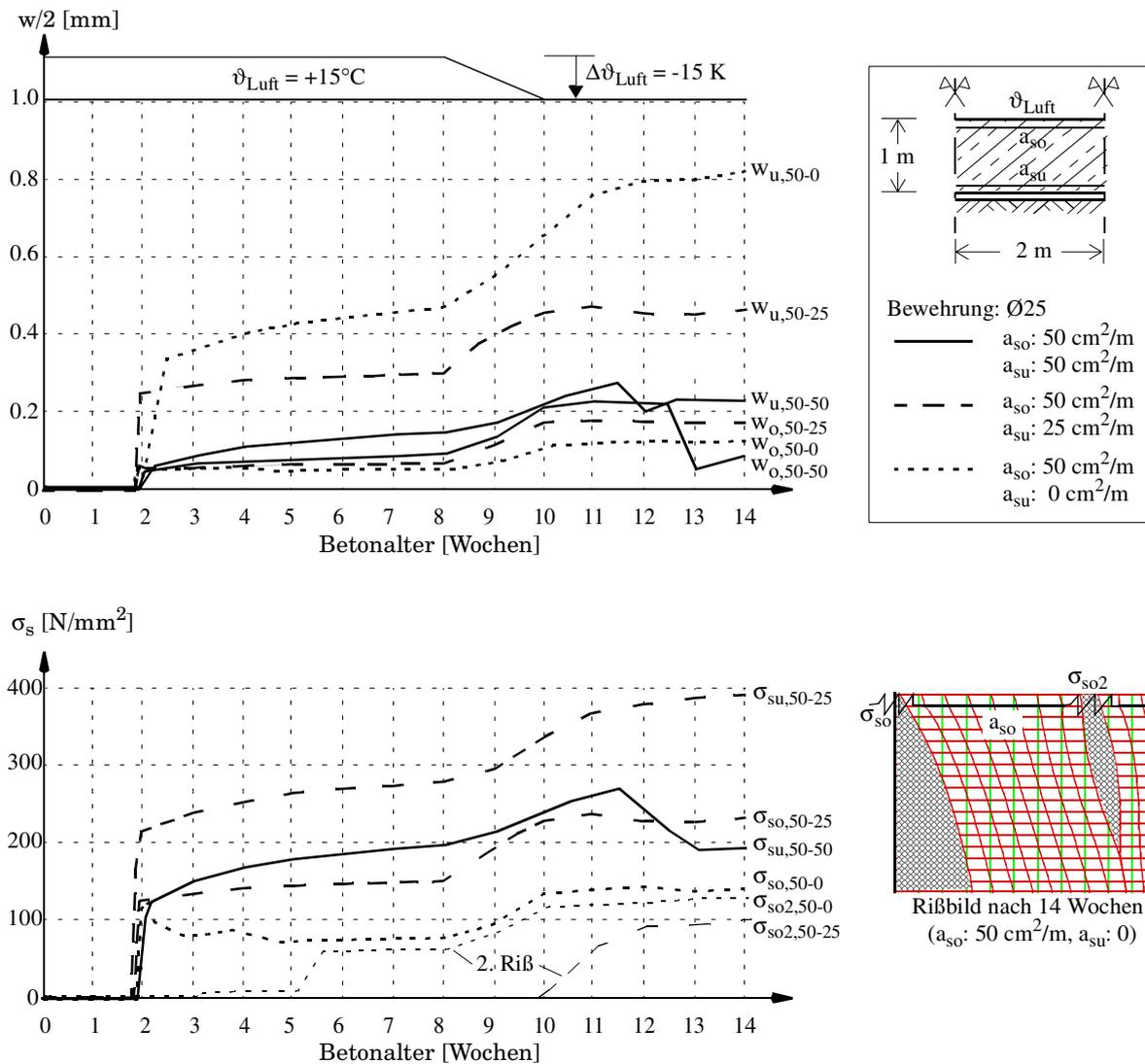


Abb. 8-27: Einfluß der Bewehrungsanordnung auf Spannungen und Rißbreiten.

Die Konzentration der Bewehrung an der Plattenoberseite führt zu einem äußerst ungleichmäßigen Rißverlauf über den Querschnitt. An der Bewehrungsseite können durch das Schrägstellen der Rißufer sehr geringe Rißbreiten erzielt werden. Dagegen treten auf der Unterseite extrem große Werte auf. Durch die einseitige Kraftübertragung im Riß wird bereits in kurzer Entfernung der nächste Riß an der Plattenoberseite erzeugt, was sich günstig auf die Rißbreite auswirkt. Zusammenfassend sind in Abb. 8-28 die Rißuferverschiebungen der untersuchten Bewehrungsvarianten nach 28 Tagen dargestellt.

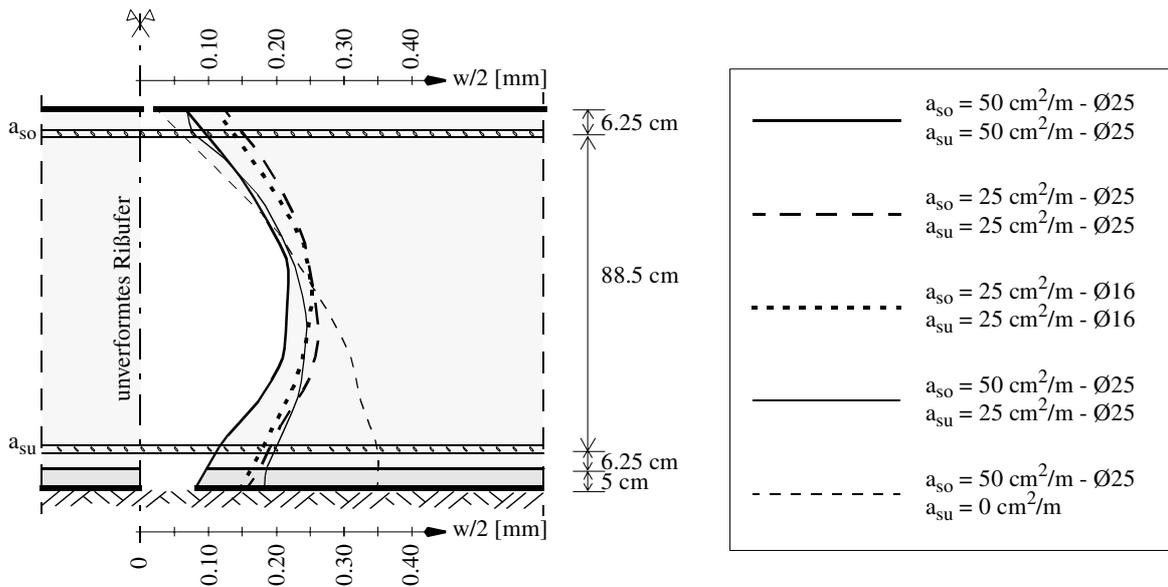


Abb. 8-28: Vergleich der Rißuferverschiebungen nach 28 Tagen bei Variation der Bewehrung.

8.4.6 Untersuchung einer zweischichtigen Bauweise

8.4.6.1 System

Aus früheren Untersuchungen der zwangbedingten Rißbildung ist der günstige Einfluß einer mehrschichtigen Bauweise bezüglich der erforderlichen rißbreitenbeschränkenden Bewehrung bekannt [182-184]. Dies führte zu einer erheblichen Reduzierung der Mindestbewehrung von Tunnelinnenschalen gegenüber der pauschalen Regelung nach DIN 1045 [51]. Ausgehend von diesen Erfahrungen soll deshalb untersucht werden, inwieweit bei Bodenplatten eine zweischichtige Bauweise ausgenutzt werden kann, um die Rißbildung infolge Hydratationszwang günstig zu beeinflussen. Zum Vergleich mit der einschichtigen Bauweise wird angenommen, daß die Bodenplatte in zwei 0,5 m dicken Schichten mit einem Abstand von einer Woche hergestellt wird.

Das FE-System ist weitgehend identisch mit dem in Abb. 8-19 gezeigten. Die obere und untere Hälfte der Bodenplatte werden unterschiedlichen Gruppen zugeordnet, wobei die obere Hälfte erst 7 Tage nach Einbau der unteren Schicht aktiviert wird. Bis dahin muß eine zusätzliche Temperaturrandbedingung am oberen freien Rand der ersten Schicht eingebaut werden, die in der zweiten Bauphase deaktiviert wird. Ansonsten werden die Materialparameter und Randbedingungen aus den bisherigen Berechnungen übernommen.

8.4.6.2 Temperaturentwicklung

Bereits ohne Rechnung kann vorhergesagt werden, daß die Temperaturentwicklung einer zweischichtigen Bauweise erheblich günstiger verläuft, als bei Herstellung in einem Guß. Die Hydratationswärme der ersten Bauphase ist nach 7 Tagen bereits weitgehend abgebaut und die Maximaltemperaturen fallen deutlich geringer aus. Dies bestätigt die FE-Rechnung, deren Ergebnisse in Abb. 8-29 dargestellt sind.

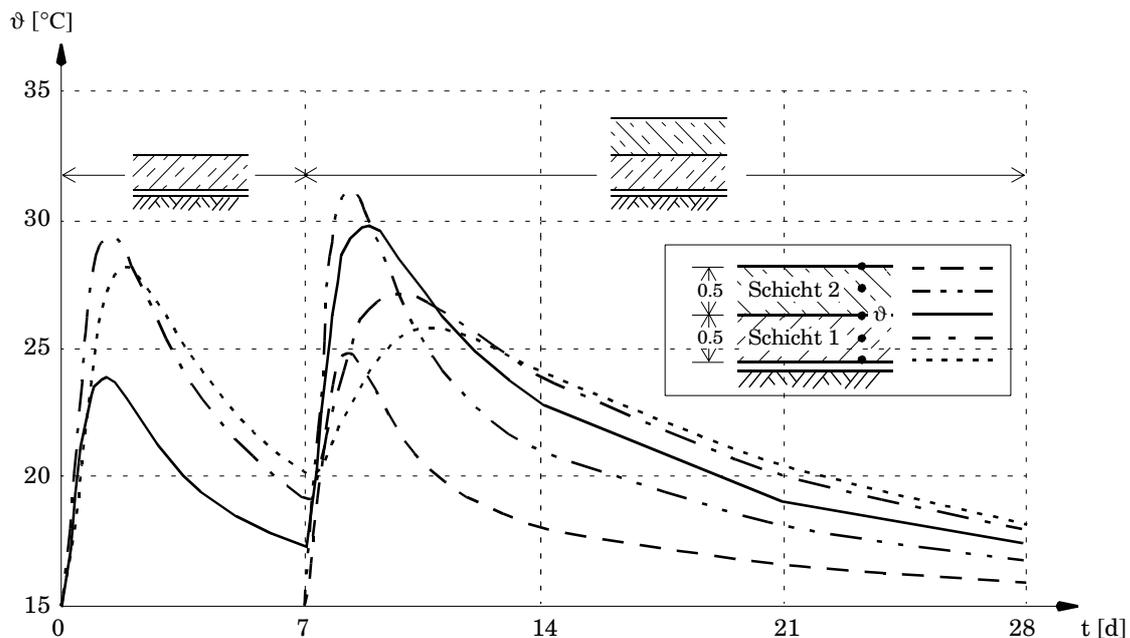


Abb. 8-29: Entwicklung der Temperaturen bei der zweischichtigen Bauweise.

8.4.6.3 Spannungsentwicklung

Während der zweiten Erwärmungsphase ist die Entwicklung der Steifigkeit der unteren Schicht bereits weit fortgeschritten ist. Dies führt sehr schnell zu erheblich größeren Druckspannungen als während der Erwärmung durch die eigene Hydratation. So entsteht eine Art thermische Druckvorspannung in der unteren Schicht, die durch die erneute Abkühlung wieder aufgebraucht wird, so daß die Hydratationswärme der oberen Schicht im unteren Bereich nahezu spannungsneutral abgebaut wird und dort tatsächlich nur ähnlich geringe Spannungen auftreten wie bei einer einschichtigen 50 cm dicken Platte (Abb. 8-30).

Die Hydratationswärme verursacht in der oberen Schicht größere Spannungen als in einer nur 50 cm dicken Platte, da die Temperaturentwicklung ungünstiger verläuft. Trotzdem sind die auftretenden Zugspannungen erheblich niedriger als bei der einschichtigen Bauweise einer 1 m dicken Platte (vgl. Abb. 8-21). Die Zugfestigkeit wird infolge abfließender Hydratationswärme nicht erreicht, u.a. weil sich durch die mehrschichtige Bauweise die Eigenspannungen erheblich reduzieren (Abb. 8-31).

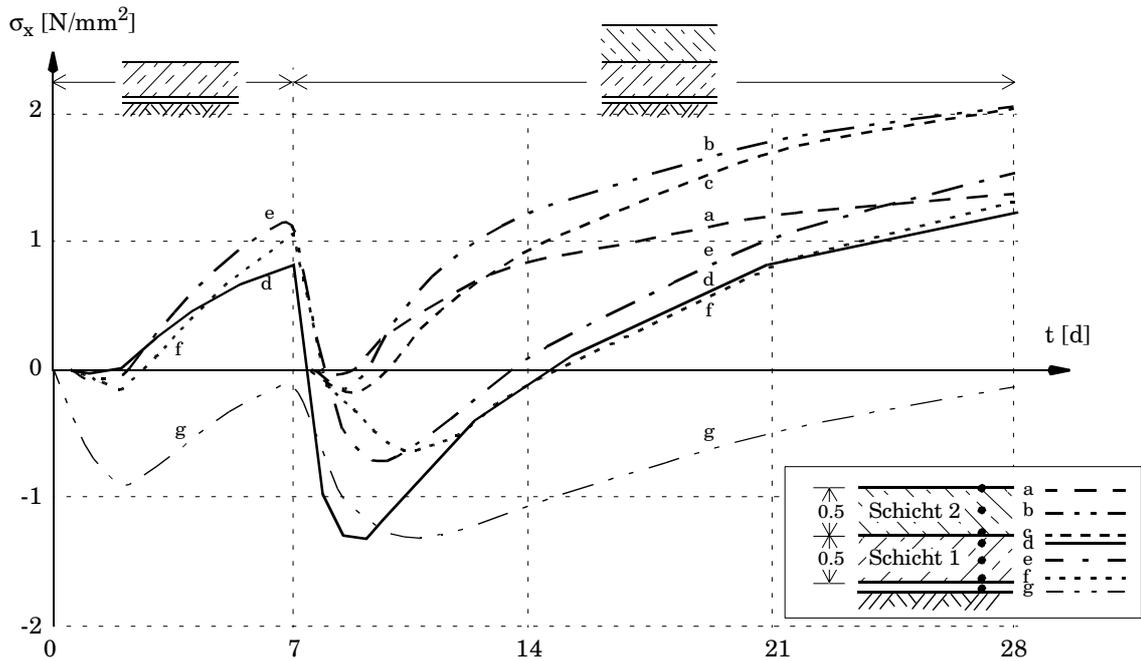


Abb. 8-30: Entwicklung der Zwangspannungen bei der zweischichtigen Bauweise.

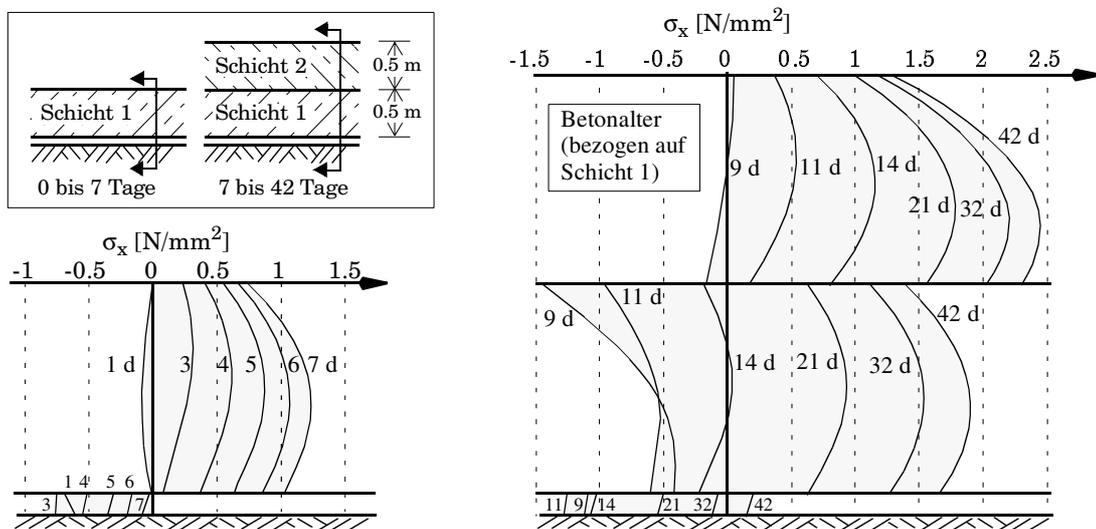


Abb. 8-31: Zwangspannungen im Querschnitt zu verschiedenen Zeitpunkten bei zweischichtiger Bauweise.

Für die Aufnahme weiterer äußerer Zwangeinwirkungen steht noch eine Reserve von etwa 1 N/mm^2 zur Verfügung, die bei vollständiger Verformungsbehinderung bereits durch eine Abkühlung von wenigen Kelvin aufgezehrt wird. Außerdem können lokale Fehlstellen oder geometriebedingte Singularitäten zu Spannungsspitzen führen, welche die Rißbildung auch bei geringem Ausnutzungsgrad initialisieren. Deshalb wurde auch für die zweischichtige Bauweise eine Abkühlung der Luft um 15 K angesetzt, die zu einem Riß führt (Rißabstand 4 m). Daraufhin wird die Betonzugfestigkeit

gerade nicht mehr erreicht, so daß sich kein zweiter Riß bildet. Die sich einstellende Rißgeometrie unterscheidet sich qualitativ nicht von der vergleichbaren einschichtigen Konstruktion. Auch die ermittelten Rißbreiten befinden sich in derselben Größenordnung (Abb. 8-32). Insgesamt zeigen die Ergebnisse, daß die Aufteilung einer dicken Bodenplatte in mehrere Schichten für die Strategie der Rissevermeidung erhebliche Vorteile bringt. Die Verminderung der Zwangeinwirkung hat allerdings für die Rissebeschränkung nicht den erhofften positiven Effekt. Es bleibt außerdem die Frage zu klären, ob die baubetrieblichen Nachteile gegenüber den statischen Vorteilen unter dem Aspekt der Wirtschaftlichkeit überwiegen.

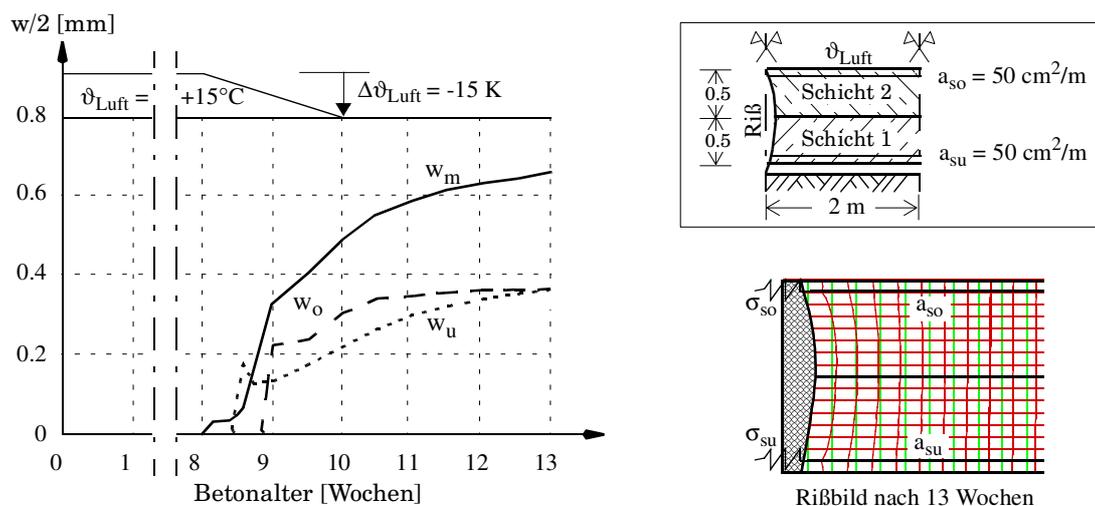


Abb. 8-32: Rißbildung bei der zweischichtigen Bauweise.

8.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wird die Anwendbarkeit der beschriebenen Rechenmodelle für hydratisierende Betonbauteile demonstriert. Die Nachrechnung der Meßergebnisse von Plannerer [161] zeigt, daß die Simulation der Temperaturentwicklung unter Anwendung des Hydratationsansatzes nach Jonasson und der Reifefunktion nach Freiesleben et al. (vgl. Kapitel 2) gut gelingt. Der Vergleich mit den gemessenen Spannungen macht deutlich, daß die qualitativen Zusammenhänge vom Rechenmodell richtig wiedergegeben werden. Dagegen sind die quantitativen Ergebnisse der Spannungsmessung nur in gewissen Grenzen erfaßbar. Aus den Nachrechnungen ergeben sich folgende wesentliche Gesichtspunkte:

- Die Ergebnisse reagieren zum Teil sehr sensitiv auf Änderungen der Eingangsparameter. Insbesondere der Hydratationsgrad α_o , ab welchem Festkörpereigenschaften einsetzen, sowie die Kriechparameter sind Kennwerte, welche einerseits großen Einfluß haben, andererseits aber im Vorfeld einer Baumaßnahme selten genau spezifiziert werden können.

- Die natürliche Streuung der Materialkenngrößen und die hochgradig nichtlinearen Systemantworten erlauben nur eine Aussage über eine gewisse Bandbreite der Ergebnisse. Verlässliche Aussagen können nur durch Berücksichtigung von oberen und unteren Grenzwerten getroffen werden.
- Der Modellierungs- und Rechenaufwand einer einzigen instationären FE-Berechnung unter Berücksichtigung eines möglichst realitätsnahen Materialverhaltens ist – gemessen an heutigen Rechnerleistungen – immer noch als sehr hoch einzustufen. Sensitivitäts- oder Parameterstudien sind zur Zeit nur im Rahmen von Forschungsarbeiten durchführbar.

Vor diesem Hintergrund wird beispielhaft eine 1 m dicke Bodenplatte näher untersucht. Um die Größe der FE-Systeme zu begrenzen, müssen geeignete Systemausschnitte aus dem Gesamtbau teil betrachtet werden. Charakteristischerweise sind dies bei einer Bodenplatte der Plattenrand und der Grenzfall eines vollständig verformungsbehinderten Ausschnittes aus dem Platteninneren. An diesen Modellsystemen können einige wesentliche Zusammenhänge zwischen Zwangursache und Zwangspannung sowie zwischen Rißbreite und Bewehrung aufgezeigt werden. Wesentliche Ergebnisse sind

- der Aufbau von Zwangspannungen durch Bodenreibung (Abschnitt 8.3.3.1),
- der Einfluß unterschiedlicher Betonrezepturen (Abschnitt 8.3.2 und Abschnitt 8.3.3.2),
- der Einfluß verschiedener Sohlfugenausbildungen (Abschnitt 8.3.3.3),
- der Einfluß von Bewehrungsmenge, -durchmesser und -anordnung (Abschnitt 8.4.5),
- der günstige Einfluß einer zweischichtigen Bauweise (Abschnitt 8.4.6).

Verallgemeinerbare quantitative Aussagen sind aufgrund der im Einzelfall unterschiedlichen Randbedingungen (Betonrezeptur, Konstruktion, Bauablauf, Geometrie) nur schwer möglich. Hierzu wären umfangreiche Parameterstudien notwendig, die nicht Gegenstand dieser Arbeit sind. Im konkreten Fall der untersuchten Bodenplatte kann allerdings festgestellt werden, daß die Variante mit einem Bewehrungsprozentsatz von $\rho = 1\%$ bei $\varnothing 25$ gerade ausreicht, um wasserführende Risse allein infolge abfließender Hydratationswärme (ohne zusätzliche Zwangeinwirkungen) zu vermeiden. Dies bedeutet, daß die Mindestbewehrung, die nach DIN 1045 [51] bzw. Heft 400 [187] für hydrationsbedingten Zwang erforderlich ist ($\rho = 0.85\%$ [105]), nicht genügt, um die geforderte Rißbreite zu erzielen. Der Grund liegt darin, daß bei dem angesetzten Beton *R1* die Rißbildung infolge Hydratationszwang sehr spät erfolgt, wenn die Betonzugfestigkeit bereits 90 % des 28-Tage-Wertes und knapp 70 % des Endwertes erreicht hat. Eine Reduzierung der Betonzugfestigkeit auf 50 % ist hier nicht zulässig, auch wenn es sich um hydrationsbedingte Risse handelt. Bei Überlagerung mit weiteren Zwangeinwirkungen muß die rißbreitenbeschränkende Bewehrung für die volle Betonzugfestigkeit ausgelegt werden, obwohl ein Großteil der rißerzeugenden Betonzugspannungen aus dem frühen Hydratationszwang herrührt. Zu beachten ist, daß alle Rechenergebnisse ohne den (günstigen) Ansatz einer wirksamen Betonzugzone ermittelt werden und der Bewehrungsgrad stets auf den Gesamtquerschnitt bezogen wird. Dies ergibt sich aus den großen Eigenspannungen, welche im Abstand der Einleitungslänge vom Riß Druckspannungen am Querschnittsrand hervorrufen, so daß ein neuer Riß bei den untersuchten Beispielen stets durch ein Überschreiten der Betonzugfestigkeit in Querschnittsmitte hervorgerufen wird. Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß bei ausgeführten Bodenplatten dieses Verhalten nicht beobachtet wurde [161]. In der Regel führt ein ausgeprägter linearer Zwangspannungsanteil zu einem Überschreiten der Betonzugfestigkeit an der Plattenoberseite und zu Biegerissen mit V-förmigem Verlauf.

Kapitel 9

Zusammenfassung

9.1 Motivation

Grundsätzlich gibt es zwei Strategien, um hydrationsbedingte, wasserführende Risse in jungen Betonbauteilen zu vermeiden. Zum einen wird durch Betonrezeptur, Konstruktion und Nachbehandlung versucht, die Zwangsspannungen kleiner als die Betonzugfestigkeit zu halten. Das alternative Konzept sieht ebenfalls betontechnologische Maßnahmen zur Zwangreduzierung vor. Es geht jedoch davon aus, daß trotzdem Risse entstehen und sieht eine Beschränkung der Rißbreite durch Bewehrung vor. Für beide Strategien sind Rechenmodelle notwendig, die ergänzend zu experimentellen Untersuchungen Einblick in das Tragverhalten geben und als Hilfsmittel bei der Planung und Dimensionierung dienen. Hierzu sei aus dem Betonkalender-Aufsatz von Lindner [130] zitiert:

„Wegen der Empfindlichkeit von wu-Baukörpern gegen Zwang muß (so [49], Abschn. 3.5) das den rechnerischen Nachweisen zugrundegelegte statische System (Steifigkeiten, Lagerungsbedingungen o.ä.) den Beanspruchungszustand wirklichkeitsnah abbilden. Bei flächig gelagerten Bauwerken sind zudem das Verformungsverhalten des Baugrunds und seine Auswirkungen auf das Tragwerk zu beachten. Alle Einwirkungen, einschließlich der wahrscheinlichen Zwangbeanspruchungen, sind, soweit möglich, wirklichkeitsnah zu berücksichtigen ...”

In diesem Sinne stellt die vorliegende Arbeit einen Beitrag zur wirklichkeitsnahen, rechnerischen Untersuchung der bei der Hydratation auftretenden physikalischen Vorgänge der Wärmeleitung und Strukturmechanik dar.

9.2 Ergebnisse dieser Forschungsarbeit

Das umfassend gewählte Thema *Berechnungsmodelle für rißgefährdete Betonbauteile unter frühem Temperaturzwang* soll in dieser Arbeit nicht abschließend behandelt werden. Vielmehr werden eingebettet in einen Überblick der gesamten Problemstellung an mehreren Stellen vorhandene Modelle erweitert oder neue Modelle vorgeschlagen. Die wesentlichen Beiträge dieser Arbeit sollen kurz skizziert werden:

- Eine ausführliche Literaturstudie zeigt, daß eine Vielzahl von Hydrationsansätzen existiert, die fast ausschließlich empirischer Natur sind und deren Verallgemeinerbarkeit zunächst fraglich ist. Deshalb werden die teilweise sehr unterschiedlich aufgebauten Ansätze mathematisch so umge-

formt und aufbereitet, daß ein direkter Vergleich möglich wird. Dieser Vergleich zeigt, daß einerseits die bekannte Reifefunktion nach Saul [181], kombiniert mit dem Hydratationsansatz nach Wesche [236], für die meisten Anwendungen ausreichend genau ist. Andererseits existiert mit der Reifefunktion nach Freiesleben et al. [75] in Kombination mit dem Hydratationsansatz nach Jonasson [101] ein Ansatzkonzept mit größerem Gültigkeitsbereich, welches vielfach verifiziert ist.

- Für die Entwicklung der wichtigsten mechanischen Parameter (Elastizitätsmodul, Festigkeiten) während der Hydratation existieren Ansätze, die ausreichend genau sind und vorteilhafterweise mit nur einem zusätzlichen Materialparameter α_0 auskommen. Da zur Entwicklung der Bruchenergie zunächst noch keine Angaben vorlagen, wird ein Ansatz affin zur Steifigkeitsentwicklung vorgeschlagen, der zeitgleich in ähnlicher Form auch von Gutsch [83] gefunden wurde. Für andere Parameter kann eine Hydratationsabhängigkeit oft vernachlässigt werden.
- Da das zeitabhängige Verhalten gerade bei jungem Beton eine große Rolle spielt, beschäftigt sich die Arbeit auch mit viskoelastischen Werkstoffmodellen. Die lineare Viskoelastizität für erhärtende Baustoffe wie Beton bei Beanspruchungen auf Gebrauchslastniveau ist hinreichend bekannt und verifiziert. Im Rahmen der Untersuchungen zu dieser Theorie konnte sowohl eine Viskoelastizitätstheorie für Schädigungsphänomene als auch eine vereinheitlichte Theorie aufgestellt werden, welche die Berücksichtigung von isotropen Erhärtungs- und Schädigungsphänomenen erlaubt. Eine praktische Anwendung erfordert jedoch Ansätze, die den Schädigungsgrad in Abhängigkeit von Alter, Temperatur und anderen Einflüssen definieren. Diese Zusammenhänge sind bisher nicht ausreichend erforscht.
- Die Rechenmodelle für die Lösung der thermomechanischen Grundgleichungen auf Basis der Finite-Element-Methode sind sehr weit fortgeschritten und bedürfen im Rahmen dieser Arbeit keiner wesentlichen Erweiterungen. Es werden jedoch die grundsätzlichen Zusammenhänge zwischen Temperatur, Hydratationsgrad und Verschiebung spezifiziert und verschiedene Stufen der Kopplung definiert und analysiert. Eine vollständige Kopplung zwischen Temperatur- und Verschiebungsberechnung ist für die vorliegende Problemstellung nicht erforderlich.
- Bisherige Arbeiten auf dem Gebiet der rechnerischen Behandlung hydratationsbeanspruchter Bauteile berücksichtigen nur den Zustand im ungerissenen Bereich bzw. verwenden verschmierte Rißmodelle. Da die Rißbreite oft das maßgebende Bemessungskriterium darstellt, wird ein Ansatz von Schikora für die Modellierung der Bewehrung in Kombination mit einem diskreten Rißmodell aufgegriffen und weiterentwickelt, der bereits erfolgreich zur Ermittlung der Mindestbewehrung von Tunnelinnenschalen eingesetzt worden ist [182–184]. Der maßgebliche Vorteil dieses Ansatzes besteht darin, daß er sich direkt aus dem genormten Rißgesetz ableitet, was zur Folge hat, daß der Zusammenhang zwischen Rißöffnung auf Höhe der Bewehrung und Stahlspannung stets den Grundlagen der Norm entspricht. Für dieses normenkonforme Rißmodell wird ein entsprechendes finites Bewehrungs-Riß-Element entwickelt.
- Die Verifikation durch die Nachrechnung von Messungen zeigt, daß Laborversuche mit klar umrissenen Randbedingungen gut abgebildet werden können. Der Vergleich mit Meßergebnissen an ausgeführten Bauwerken führt jedoch die Sensitivität in Bezug auf die in Realität vorhandenen Unsicherheiten bei den Randbedingungen und Eingangsparametern vor Augen.

- Die Anwendung der vorgestellten Modelle gibt Einblicke in das Tragverhalten von Bodenplatten unter Zwangbeanspruchung. Insbesondere die Mechanismen der Rißbildung und der Einfluß verschiedener Systemparameter sind wesentliche Ergebnisse der angestellten Berechnungen. Verallgemeinerbare quantitative Aussagen sind jedoch aufgrund der starken Abhängigkeit von den jeweiligen Randbedingungen nicht ohne weiteres möglich.

9.3 Anregung für weitere Forschungen

Der erreichte Stand der Berechnungsmodelle ist für viele Anwendungszwecke bereits ausreichend genau. Einige Detailfragen sind jedoch noch nicht ausreichend erforscht. Die aus Sicht des Verfassers wesentlichen Ansatzpunkte für weitere Forschungsvorhaben seien hier stichpunktartig aufgeführt:

- Die zur Verfügung stehenden Hydratationsansätze scheinen für Normalbeton hinreichend exakt. Für die praktische Anwendung wäre es allerdings vorteilhaft, wenn die Modellparameter übersichtlich in Abhängigkeit der Betonrezeptur angegeben werden können.
- Der einzig ausreichend verifizierte Kriechansatz für jungen Beton stammt von Laube [126]. Auch für diesen Ansatz wären weitere systematische Untersuchungen zu den Parametern notwendig. Erste Ansätze hierzu finden sich bei Gutsch [83].
- Der Einfluß der Feuchteverteilung im Bauteil auf die Hydratation und die Spannungsverteilung sollte insbesondere für Bauteile mit einem ausgeprägten Feuchtegradienten genauer quantifiziert werden [153, 171].
- Das in dieser Arbeit theoretisch abgeleitete Stoffgesetz für kombinierte Schädigung und Erhärtung wurde bisher nicht verifiziert. Für eine experimentelle Überprüfung sind Forschungsarbeiten hinsichtlich des anzusetzenden Schädigungsparameters in Abhängigkeit der wesentlichen Einflußfaktoren Betonalter, Temperaturgeschichte, Spannungsgeschichte, usw. notwendig. Darüber hinaus sollte überprüft werden, ob das Konzept eines skalaren Schädigungsparameters für alle Anwendungsfälle genügt, oder ob ein Schädigungstensor in die Theorie einzubauen ist.
- Außerdem besteht Forschungsbedarf hinsichtlich der Integration der Spannungs- und Erhärtungsgeschichte innerhalb des viskoelastischen Werkstoffgesetzes. Die bisher übliche Lösung durch eine Reihenentwicklung sollte im Hinblick auf die in Zukunft verfügbaren Computerkapazitäten neu überdacht werden.
- Das von einigen Autoren beobachtete unterschiedliche Kriechverhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung [118] wird bisher in den Kriechansätzen für jungen Beton nicht berücksichtigt. Der Einbau dieser Unterscheidung in viskoelastische Stoffgesetze ist im Hinblick auf wechselnde Spannungsvorzeichen und nicht monotone Belastungspfade zu untersuchen.
- Den Versuchen von Gutsch [83] sollten weitere Untersuchungen zum Nachrißverhalten hydratisierender Betonbauteile folgen. Darauf aufbauend ist ein entsprechendes Stoffgesetz zu entwickeln, da alle bisherigen Ansätze das tatsächliche Verhalten nur unzureichend beschreiben.

- Das vorgeschlagene Bewehrungs-Riß-Element für ein diskretes Riß-Modell mit diskreter Bewehrung könnte weiter verfeinert werden. Unter anderem würde sich anbieten, das auf Zwangbeanspruchungen ausgerichtete Modell auch für Lastschnittgrößen einzusetzen und das bisher unberücksichtigte Verbundkriechen zu modellieren.

9.4 Fazit

Auch ohne die beschriebenen zukünftigen Erweiterungsmöglichkeiten hat sich das vorgestellte Modell bei der Nachrechnung von Meßergebnissen und zur Untersuchung wesentlicher Zusammenhänge bei Bodenplatten bewährt. Beim Einsatz innerhalb einer statischen Berechnung muß aufgrund des hochgradig nichtlinearen Charakters der Problemstellung mit oberen und unteren Grenzwerten der Materialparameter eine Bandbreite der möglichen Ergebnisse abgeschätzt werden.

Die Vorhersage von Rißvorgängen infolge Hydratationszwang bleibt jedoch trotz fortgeschrittener Rechenhilfsmittel ein äußerst schwieriges Unterfangen. Als Abschluß sei deshalb nochmals Lindner [130] zitiert, der diese Problematik treffend zusammenfaßt:

„Die Erfahrung zeigt, daß sich trotz sorgfältiger Planung, Bemessung, baulicher Durchbildung und Bauausführung einzelne Risse mit größeren Breiten als die zuvor genannten Werte nicht vermeiden lassen. Es gehört jedoch zum anerkannten Stand der Technik, derartige Risse nachträglich durch Verpressung zu füllen oder zu schließen.“

Anhang A

Betoneigenschaften

Da keine eigenen Versuche durchgeführt wurden, basieren die Beispielrechnungen und vergleichenden Betrachtungen auf Betoneigenschaften, wie sie von anderen Autoren angegeben wurden. Um die dargestellten Ergebnisse für Nachrechnungen transparent zu machen, werden die zugrundeliegenden Materialeigenschaften im folgenden tabellarisch wiedergegeben.

A.1 Betone nach Huckfeldt

Die Betondaten, die Huckfeldt in seiner Dissertation [97] für Beispielrechnungen verwendet, basieren auf verschiedenen Veröffentlichungen aus dem Braunschweiger Baustoffinstitut:

- Beton *L1*: B 25, Daten aus der Dissertation von Laube [126].
- Beton *R1*: B 35 WU, WU-Beton nach [155].
- Beton *R2*: B 35, Fundamentplatte des BfG-Hochhauses in Frankfurt/M. nach [176].

| Eigenschaft | Beton <i>L1</i> | Beton <i>R1</i> | Beton <i>R2</i> |
|-------------------------------------------------------|-----------------|-------------------|-------------------|
| <i>Betonzusammensetzung</i> | | | |
| Beton (DIN) | B 25 | B 35 WU | B 35 |
| Zement (DIN) Zementgehalt Z [kg/m ³] | PZ 35 F 240 | HOZ 35 LNW 390 | HOZ 35 LNW 240 |
| Zusatzstoff Zusatzstoffgehalt [kg/m ³] | Flugasche 80 | — | Flugasche 60 |
| Zuschlaggehalt [kg/m ³] | 1792 | 1765 | 1945 |
| Wassergehalt W [kg/m ³] | 185 | 185 | 160 |
| W/Z - Wert | 0.58 | 0.47 | 0.53 |
| <i>Kenngrößen der Wärmeleitung</i> | | | |
| Rohdichte ρ [kg/m ³] | 2400 | 2390 | 2415 |
| Wärmeleitfähigkeit λ [W/mK] | 1.8 | 2.6 | 1.8 |
| spezifische Wärmekapazität c [J/kgK] | 1026 | 1150 | 1140 |

| Eigenschaft | Beton <i>L1</i> | Beton <i>R1</i> | Beton <i>R2</i> |
|-----------------------------------------------------------------------------|---------------------|-----------------|-----------------|
| <i>Kenngrößen der Hydratation für den Ansatz nach Jonasson (Gl. (2.15))</i> | | | |
| Q_{∞} [kJ/m ³] | 167700 | 135750 | 105940 |
| a | -0.925 | -1.185 | -1.605 |
| b | -0.42 | -1.0 | -1.0 |
| τ_k [h] | 41.82 | 17.53 | 37.46 |
| <i>Kenngrößen für das hypoelastische Verhalten (Gl. (3.9) und (3.12))</i> | | | |
| E ($\alpha=1$) [MN/m ²] | 34220 | 36659 | 33238 |
| α_o | 0.17 | 0.35 | 0.17 |
| a | 0.945 | 1.126 | 0.945 |
| b | 0.823 | 0.828 | 0.823 |
| Querdehnzahl ν | 0.15 | | |
| α_T [1/K] | $1.2 \cdot 10^{-5}$ | | |
| <i>Kenngrößen für das Kriechverhalten (Gl. (4.33) - (4.35))</i> | | | |
| a_1 | 0.340 | 0.476 | 0.340 |
| a_2 | -0.370 | -0.417 | -0.370 |
| b_1 | 0.550 | 0.403 | 0.550 |
| b_2 | -0.480 | -0.167 | -0.48 |
| <i>Kenngrößen für das Rißverhalten</i> | | | |
| $f_{ct} (\alpha=1)$ [N/mm ²] | 3.81 | 3.43 | 2.36 |
| $G_{f,\infty}^*$ [N/mm] | 0.136 | 0.122 | 0.084 |
| Größtkorn D_{max}^K [mm] | 16 | 16 | 32 |

* G_f wurde aus der Integration der in [97] angegebenen Spannungs-Rißöffnungs-Beziehung im Bereich von $w = 0$ bis 1 mm errechnet.

Tabelle A.1: Eigenschaften der Betone *L1*, *R1* und *R2* nach [97].

A.2 Betone nach Plannerer

Zur Verifikation des Rechenmodells werden in Kapitel 8 Versuchs- und Meßergebnisse von Plannerer [161] nachgerechnet. Von den verschiedenen Betonen, die in [161] untersucht worden sind, werden die Beton *A* und *D* für die Nachrechnungen herangezogen. Die Angaben über die Betoneigenschaften aus [161] sind in Tabelle A.2 zusammengefaßt. Als Eingangswerte für die Rechenmodelle, die in dieser Arbeit benutzt werden, sind jedoch andere bzw. zusätzliche Angaben nötig, die nur zum Teil aus den Originalangaben abgeleitet werden können. Einige Parameter mußten deshalb durch die Anpassung von Vergleichsrechnungen an die veröffentlichten Meßergebnisse gefunden werden. Alle abgeleiteten oder durch Parameteridentifikation gefundenen Materialkennwerte, welche letztlich die Grundlage der Vergleichsrechnungen darstellen, sind in Tabelle A.3 beschrieben. Die Betone *A* und *D* lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

- Beton A: Laborbeton B 35 für Reißrahmenversuche
- Beton D: Transportbeton B 35 (Bodenplatte Verwaltungsgebäude WWK, München).

| Eigenschaft | Beton A | Beton D |
|-------------------------------------------------------|-----------------------|---------------------|
| <i>Betonzusammensetzung</i> | | |
| Beton (DIN) | B 35 | B 35 |
| Zement (DIN) Zementgehalt Z [kg/m ³] | CEM I 32,5 R 340 | CEM I 32,5 R 280 |
| Zusatzstoff Zusatzstoffgehalt [kg/m ³] | — | Flugasche 80 |
| Zuschlag | Moränenkies (München) | |
| W/Z - Wert | 0.50 | |
| <i>Kenngrößen der Wärmeleitung</i> | | |
| Rohdichte ρ [kg/m ³] | 2450 | |
| Wärmeleitfähigkeit λ [W/mK] | 2.6 | |
| spez. Wärmekapazität c [J/kgK] | 1000 | |

Tabelle A.2: Eigenschaften der Betone A und D nach [161].

| Eigenschaft | Beton A | Beton D |
|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| <i>Kenngrößen der Hydratation</i> | | |
| Q_{∞} [kJ/m ³] | 123300 | 103500 |
| Hydratationsansatz | wie Beton LI (Anhang A.1) | wie Beton RI (Anhang A.1) |
| <i>Kenngrößen für das hypoelastische Verhalten (Gl. (3.9) und (3.12))</i> | | |
| E ($\alpha=1$) [MN/m ²] | 48000 | 40000 |
| α_0 | 0.25 | 0.30 |
| Querdehnzahl ν | 0.15 | |
| α_T (entspr. Tab. 3.1) [1/K] | $0.7 \cdot 10^{-5}$ | $0.6 \cdot 10^{-5}$ |
| <i>Kenngrößen für das Kriechverhalten (Gl. (4.33) - (4.35))</i> | | |
| a_1 | 0.3 | |
| a_2 | 0 | |
| b_1 | 0.32 | |
| b_2 | 0 | |

Tabelle A.3: Grundlagen für die Vergleichsrechnungen in Kapitel 8.

A.3 Standardbetone für den Hydratationsansatz nach Wesche

In der nachfolgenden Tabelle sind einige typische Standardbetone nach DIN 1045(7/88), wie sie zur Auswertung des Hydratationsansatzes nach Wesche in Abschnitt 2.3.3.2 verwendet wurden, zusammengestellt.

| Betongüteklasse | B 25 | B 35 | B 45 | B 55 |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------|--------------|
| Zementart | 32.5R (Z 35F) | 42.5R (Z 45F) | 52.5R (Z 55) | 52.5R (Z 55) |
| W/Z | 0.60 | 0.57 | 0.54 | 0.45 |
| Z [kg/m ³] | 350 | 368 | 388 | 467 |
| Q _∞ [kJ/m ³] | 103250 | 139840 | 147440 | 177460 |
| entspr. ca. Δv _∞ ^{ad} [K] | 39 | 53 | 56 | 67 |
| Q(t) | Q _∞ · exp(-43,3 · t ^{-1,35}) | Q _∞ · exp(-11,1 · t ^{-1,0}) | | |
| q(t) | Q _∞ 48,455 t ^{-2,35} exp(-43,3 t ^{-1,35}) | Q _∞ · 11,1 · t ⁻² · exp(-11,1/t) | | |

Tabelle A.4: Betonzusammensetzung für einige Standardbetone nach DIN (Körnungslinie C 16, Konsistenz KP, Wassergehalt 210 kg/m³) und Wärmefreisetzung nach [193].

Anhang B

Wärmefreisetzung während der Hydratation

B.1 Isotherme Wärmefreisetzung (Realzeit)

Wie in Abschnitt 2.4.2 erläutert, ist eine analytische Darstellung der Wärmefreisetzung in Abhängigkeit der realen Zeit nur für den isothermen Sonderfall möglich. Als baupraktische Näherung für die Ermittlung der Wärmefreisetzungskurve $q(t)$ unter Bauwerksbedingungen kann mit einer isothermen Ersatztemperatur ϑ_{ers} gerechnet werden, die zwischen der Ausgangstemperatur ϑ_0 und der maximalen Bauteiltemperatur liegt. Die rechnerische Bauteiltemperatur stellt sich dann in guter Näherung entsprechend den tatsächlichen Gegebenheiten ein. Einen Anhaltswert für ϑ_{ers} gibt die folgende Beziehung:

$$\vartheta_{\text{ers}} = \vartheta_0 + a \cdot \frac{Q_{\infty}}{c \cdot \rho} \quad (\text{B.1})$$

mit ϑ_0 Ausgangstemperatur [°C]
 a Faktor je nach Erhärtungsbedingungen
 a = 0 für isotherme Bedingungen
 a = 1/3 für dünne Bauteile
 a = 2/3 im Inneren dicker Bauteile

Die Reifefunktionen aus Abschnitt 2.3.2 sind für isotherme Bedingungen konstant, und das wirk-same Betonalter ist linear von der realen Zeit abhängig:

$$\text{Saul [181]: } \tau_w = \frac{\vartheta_{\text{ers}} + 10}{30} dt = \frac{\vartheta_{\text{ers}} + 10}{30} t = \hat{a}_S \cdot t \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Freiesleben, Hansen, Pedersen [75]: } \tau_w = \exp \frac{A}{R} \frac{1}{293} - \frac{1}{273 + \vartheta_{\text{ers}}} t = \hat{a}_F \cdot t \quad (\text{B.3})$$

(A und R siehe Gl. (2.7) auf Seite 13)

Setzt man τ_w in die Ansätze für die Wärmefreisetzung nach Wesche (Gleichung (2.13)) oder Kirchner (Gleichung (2.21)) ein, so erhält man direkt die gesuchte Funktion für den zeitlichen Verlauf der Wärmefreisetzung. Will man die in α oder Q formulierten Ansätze verwenden, so ist eine Umformung entsprechend Gleichung (2.10) notwendig:

$$q(t) = Q_{,t} = Q_{, \tau_w} \cdot \tau_{w,t} = Q_{\infty} \cdot \alpha_{, \tau_w} \cdot \tau_{w,t} \quad (\text{B.4})$$

wobei $\tau_{w,t}$ im isothermen Fall nur der konstante Faktor \hat{a} nach Gleichung (B.2) oder (B.3) ist, und $Q_{, \tau_w}$ bzw. $\alpha_{, \tau_w}$ sich durch einfache Ableitung der verschiedenen Ansätze ergeben. Für den Ansatz nach Jonasson erhält man somit die isotherme Wärmefreisetzungsrate in Abhängigkeit des realen Betonalters:

$$q(t) = Q_{\infty} \cdot a b \frac{\ln(1 + \frac{\hat{a}}{\tau_k} t)^{a-1}}{\tau_k / \hat{a} + t} \exp(b \ln(1 + t \hat{a} / \tau_k)^a) \quad (\text{B.5})$$

Für isotherme Bedingungen bei 20°C ist in Abb. B-1 der Verlauf von Wärmefreisetzung q und Wärmemenge Q für die drei Betone aus Anhang A.1 gegenübergestellt. Obwohl es sich um Betone ähnlicher Festigkeitseigenschaften handelt, ist das Hydratationsverhalten offenbar sehr unterschiedlich. Im folgenden wird gezeigt, daß die Darstellung in Abhängigkeit des Hydratationsgrades formal ähnliche Kurvenverläufe ergibt.

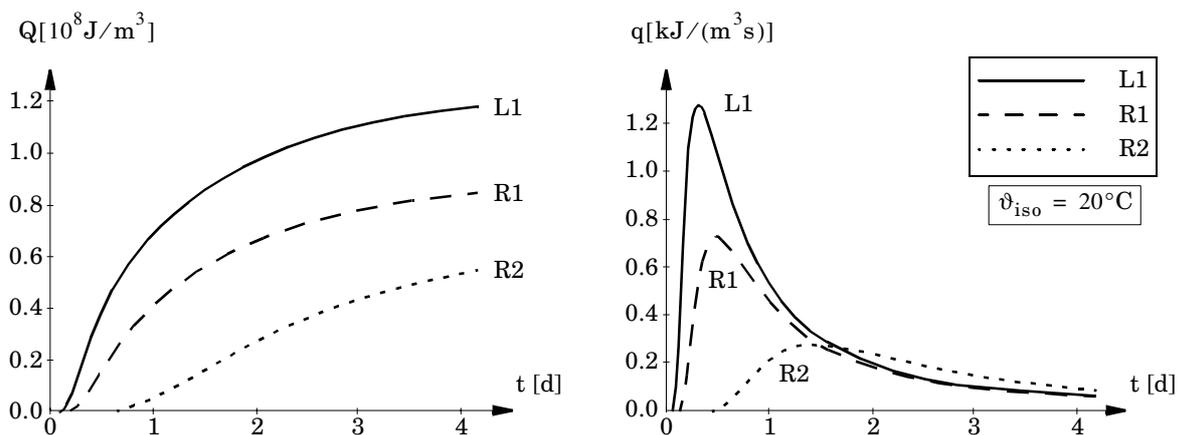


Abb. B-1: Isotherme Wärmefreisetzungsrate der Betone *L1*, *R1*, *R2* nach Anhang A.1 in Abhängigkeit der Zeit (Hydratationsansatz nach Jonasson).

B.2 Isotherme Wärmefreisetzungsrate (Hydratationsgrad)

Infolge des konstanten Temperaturzustandes degeneriert die Reifefunktion im isothermen Fall zu einer Konstanten, die in dieser Arbeit mit \hat{a} bezeichnet wird. Demzufolge ist die isotherme Wärmefreisetzungsrate proportional zur Funktion $f(\alpha)$:

$$q^{\text{iso}}(\alpha) = Q_{\infty} \cdot \hat{a} \cdot f(\alpha) \quad (\text{B.6})$$

Die Funktion $f(\alpha)$ stellt die Ableitung des Hydratationsansatzes $\alpha(\tau_w)$ nach dem wirksamen Betonalter τ_w dar. Als Grundlage für die angegebenen Tabellen dient der Hydratationsansatz nach Jonasson. Nachfolgend ist $f(\alpha)$ für die Betone *L1*, *R1*, *R2* aus Anhang A tabelliert. Die Umrechnung in

die isotherme Wärmefreisetzung erfolgt nach Gleichung (B.6) entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 2.4.2. Wird der isotherme Fall als Näherung angesetzt, so ist \hat{a} für eine isotherme Ersatztemperatur ϑ_{ers} nach Gleichung (B.1) zu ermitteln. Bei konstanter Temperatur $\vartheta_{\text{iso}} = 20$ [°C] wird $\hat{a} = 1,0$. Abb. B-2 zeigt die Ansatzfunktion $f(\alpha)$ in absoluter und auf Eins normierter Form. Tabelle B.1 enthält die entsprechenden Stützstellen für eine polygonale Definition.

| | Beton <i>L1</i> | Beton <i>R1</i> | Beton <i>R2</i> |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| <i>Stützstellen und Funktionswerte des Hydratationsansatzes f(α) nach Jonasson</i> | | | |
| α | f(α)/(maxf(α)) | | |
| 0.01 | 0.4601 | 0.4469 | 0.3722 |
| 0.02 | 0.6459 | 0.6352 | 0.5481 |
| 0.03 | 0.7629 | 0.7553 | 0.6679 |
| 0.04 | 0.8429 | 0.8380 | 0.7559 |
| 0.05 | 0.8993 | 0.8964 | 0.8224 |
| 0.06 | 0.9390 | 0.9376 | 0.8735 |
| 0.07 | 0.9665 | 0.9661 | 0.9127 |
| 0.08 | 0.9846 | 0.9847 | 0.9426 |
| 0.09 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9648 |
| 0.10 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9708 |
| 0.12 | 0.9958 | 0.9946 | 0.9976 |
| 0.14 | 0.9784 | 0.9750 | 1.0000 |
| 0.16 | 0.9516 | 0.9455 | 0.9891 |
| 0.18 | 0.9183 | 0.9090 | 0.9705 |
| 0.20 | 0.8805 | 0.8678 | 0.9452 |
| 0.25 | 0.7743 | 0.7530 | 0.8625 |
| 0.30 | 0.6622 | 0.6330 | 0.7638 |
| 0.40 | 0.4481 | 0.4088 | 0.5542 |
| 0.50 | 0.2693 | 0.2295 | 0.3603 |
| 0.60 | 0.1364 | 0.1051 | 0.2025 |
| 0.70 | 0.0513 | 0.0339 | 0.0901 |
| 0.80 | 0.0101 | 0.0051 | 0.0252 |
| 0.90 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0018 |
| <i>Skalierungswerte max f(α)</i> | | | |
| max f(α) | 0.7595·10 ⁻⁵ | 0.5330·10 ⁻⁵ | 0.2592·10 ⁻⁵ |

Tabelle B.1: Isotherme Wärmefreisetzung der Betone *L1*, *R1* und *R2*.

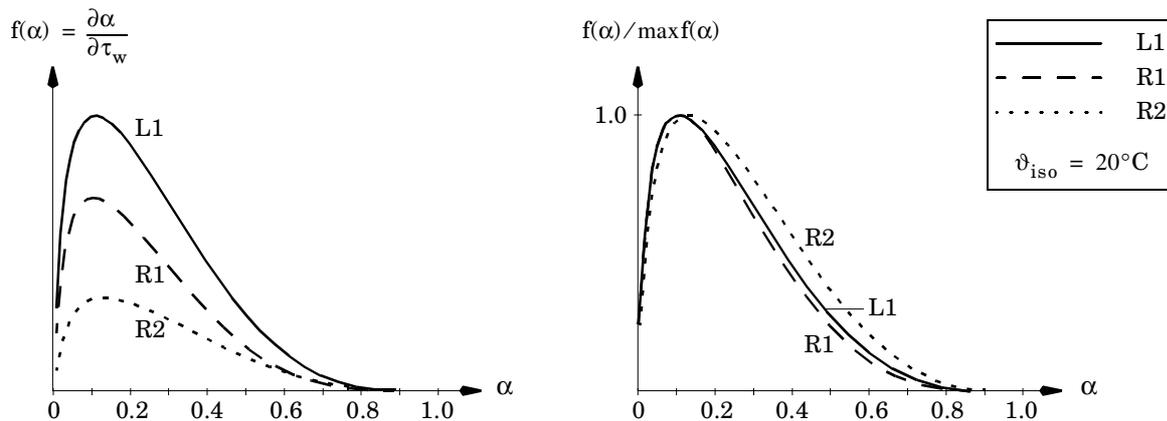


Abb. B-2: Isotherme Wärmefreisetzungsrate der Betone *L1*, *R1* und *R2* nach Anhang A.1 (Hydratationsansatz nach Jonasson).

B.3 Adiabate Wärmefreisetzung

Die in Anhang B.2 tabellierten Werte $f(\alpha)$ sind unabhängig von den Erhärtingsbedingungen und demnach auch für adiabate Erhärting gültig. Allerdings ist im adiabaten Fall die Reifefunktion $g(\vartheta)$ nicht mehr konstant, sondern abhängig vom Temperaturzustand.

$$q^{\text{ad}}(\alpha) = Q_\infty \cdot f(\alpha) \cdot g(\vartheta) \quad (\text{B.7})$$

Eine möglichst allgemeingültige Darstellung erhält man, indem das Produkt $f \cdot g$ normiert angegeben wird. Außerdem ist bei adiabaten Verhältnissen der Temperaturverlauf nichtlinear von der Ausgangstemperatur ϑ_0 abhängig. Folglich wurden die Tabellen für diskrete Ausgangstemperaturen aufgestellt und normiert:

$$\tilde{f}(\alpha, \vartheta_0) = \frac{f(\alpha) \cdot g(\vartheta, \vartheta_0)}{\max(f(\alpha) \cdot g(\vartheta, \vartheta_0))} \quad (\text{B.8})$$

In die Tabellen wurde auch der Beiwert F_{max} aufgenommen:

$$F_{\text{max}} = \max(f(\alpha) \cdot g(\vartheta, \vartheta_0)) \quad (\text{B.9})$$

Die endgültige Wärmefreisetzung ergibt sich somit folgendermaßen:

$$q^{\text{ad}}(\alpha, \vartheta_0) = Q_\infty \cdot f(\alpha) \cdot g(\vartheta) = Q_\infty \cdot \tilde{f}(\alpha, \vartheta_0) \cdot F_{\text{max}} \quad (\text{B.10})$$

Daraus ist sofort ersichtlich, daß die maximale Wärmefreisetzungsrate unabhängig vom Verlauf angegeben werden kann:

$$q_{\text{max}}^{\text{ad}} = Q_\infty \cdot F_{\text{max}} \quad (\text{B.11})$$

Q_∞ ist insbesondere bei adiabaten Verhältnissen für die Temperaturentwicklung entscheidend und sollte deshalb stets für den verwendeten Beton explizit bestimmt werden.

| | Beton <i>LI</i> | | | Beton <i>RI</i> | | | Beton <i>R2</i> | | |
|---------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|--------|-----------------------------|--------|---------|-----------------------------|--------|--------|
| ϑ_0 [°C] | 0 | 10 | 20 | 0 | 10 | 20 | 0 | 10 | 20 |
| α | $\tilde{f}(\alpha, \vartheta_0) = f(\alpha) \cdot g(\vartheta, \vartheta_0) / (\max(f(\alpha) \cdot g(\vartheta, \vartheta_0)))$ | | | | | | | | |
| 0.01 | 0.1131 | 0.2276 | 0.2883 | 0.1553 | 0.2699 | 0.3361 | 0.1349 | 0.2261 | 0.2817 |
| 0.02 | 0.1747 | 0.3394 | 0.4177 | 0.2368 | 0.4011 | 0.4889 | 0.2098 | 0.3448 | 0.4224 |
| 0.04 | 0.2739 | 0.49664 | 0.5806 | 0.3576 | 0.5760 | 0.6750 | 0.3220 | 0.5088 | 0.6037 |
| 0.06 | 0.3629 | 0.6143 | 0.6885 | 0.4558 | 0.6985 | 0.7904 | 0.4129 | 0.6273 | 0.7230 |
| 0.08 | 0.4483 | 0.7093 | 0.7680 | 0.5425 | 0.7913 | 0.8683 | 0.4928 | 0.7202 | 0.8083 |
| 0.10 | 0.5311 | 0.7866 | 0.8294 | 0.6211 | 0.8630 | 0.9223 | 0.5653 | 0.7950 | 0.8711 |
| 0.12 | 0.6113 | 0.8479 | 0.8777 | 0.6930 | 0.9175 | 0.9590 | 0.6321 | 0.8555 | 0.9177 |
| 0.14 | 0.6876 | 0.8943 | 0.9158 | 0.7584 | 0.9571 | 0.9826 | 0.6936 | 0.9040 | 0.9516 |
| 0.16 | 0.7588 | 0.9276 | 0.9456 | 0.8169 | 0.9834 | 0.9957 | 0.7501 | 0.9416 | 0.9754 |
| 0.18 | 0.8233 | 0.9536 | 0.9681 | 0.8682 | 0.9973 | 1.0000 | 0.8016 | 0.9694 | 0.9906 |
| 0.20 | 0.8795 | 0.9734 | 0.9842 | 0.9118 | 1.0000 | 0.9969 | 0.8477 | 0.9880 | 0.9985 |
| 0.22 | 0.9262 | 0.9875 | 0.9945 | 0.9470 | 0.9935 | 0.9875 | 0.883 | 0.9980 | 1.0000 |
| 0.24 | 0.9621 | 0.9962 | 1.0000 | 0.9736 | 0.9812 | 0.97241 | 0.9230 | 1.0000 | 0.9959 |
| 0.26 | 0.9865 | 1.0000 | 0.9993 | 0.9911 | 0.9638 | 0.9523 | 0.9516 | 0.9944 | 0.9868 |
| 0.28 | 0.9986 | 0.9988 | 0.9944 | 1.0000 | 0.9417 | 0.9279 | 0.9738 | 0.9830 | 0.9731 |
| 0.30 | 1.0000 | 0.9930 | 0.9849 | 0.9983 | 0.9156 | 0.8995 | 0.9893 | 0.9673 | 0.9554 |
| 0.32 | 0.9924 | 0.9827 | 0.9711 | 0.9881 | 0.8857 | 0.8677 | 0.9981 | 0.9477 | 0.9339 |
| 0.34 | 0.9816 | 0.9681 | 0.9531 | 0.9690 | 0.8525 | 0.8328 | 1.0000 | 0.9246 | 0.9091 |
| 0.36 | 0.9663 | 0.9492 | 0.9311 | 0.9415 | 0.8163 | 0.7952 | 0.9951 | 0.8983 | 0.8812 |
| 0.38 | 0.9466 | 0.9262 | 0.9053 | 0.9062 | 0.7776 | 0.7554 | 0.9834 | 0.8690 | 0.8505 |
| 0.40 | 0.9228 | 0.8994 | 0.8760 | 0.8639 | 0.7366 | 0.7137 | 0.9651 | 0.8370 | 0.8174 |
| 0.45 | 0.8458 | 0.8166 | 0.7886 | 0.7410 | 0.6270 | 0.6034 | 0.8927 | 0.7470 | 0.7255 |
| 0.50 | 0.7468 | 0.7144 | 0.6841 | 0.6090 | 0.5116 | 0.4891 | 0.7877 | 0.6461 | 0.6241 |
| 0.55 | 0.6304 | 0.5977 | 0.5678 | 0.4755 | 0.3966 | 0.3767 | 0.6614 | 0.5386 | 0.5175 |
| 0.60 | 0.5028 | 0.4727 | 0.4455 | 0.3477 | 0.2880 | 0.2719 | 0.5300 | 0.4292 | 0.4103 |
| 0.70 | 0.2485 | 0.2298 | 0.2134 | 0.1397 | 0.1134 | 0.1057 | 0.2806 | 0.2247 | 0.2126 |
| 0.80 | 0.0632 | 0.05755 | 0.0527 | 0.2574 | 0.0208 | 0.0192 | 0.0931 | 0.0737 | 0.0691 |
| 0.90 | 0.0016 | 0.0014 | 0.0013 | 0.0004 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0080 | 0.0063 | 0.0058 |
| <i>Integrale Größen</i> | | | | | | | | | |
| Q_∞ | 167700 [kJ/m ³] | | | 135750 [kJ/m ³] | | | 105940 [kJ/m ³] | | |
| $F_{\max} \cdot 10^5$ | 0.5739 | 0.8126 | 1.2515 | 0.2483 | 0.4590 | 0.7253 | 0.1140 | 0.2197 | 0.3487 |
| q_{\max} [kW/m ³] | 0.9624 | 1.3627 | 2.0988 | 0.3371 | 0.6231 | 0.9846 | 0.1208 | 0.2328 | 0.3694 |

Tabelle B.2: Adiabate Wärmefreisetzung der Betone *LI*, *RI* und *R2*.

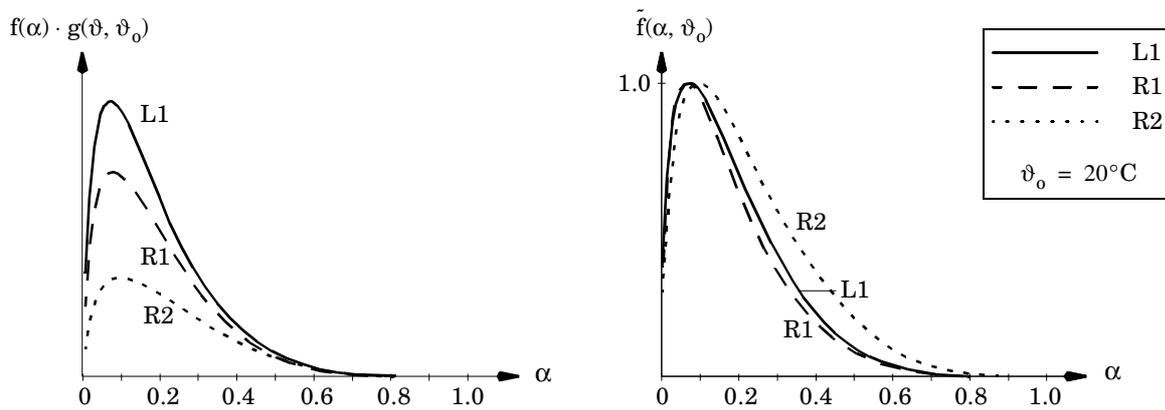


Abb. B-3: Adiabate Wärmefreisetzungsrate der Betone *L1*, *R1*, *R2* nach Anhang A.1 (Hydratationsansatz nach Jonasson, Reifefunktion nach Freiesleben et al.).

B.4 Ansatzfunktionen für den Ansatz von Reinhardt et al.

Der in Abschnitt 2.3.3.7 beschriebene Ansatz von Reinhardt et al. [168] ist prinzipiell geeignet, um das Hydratationsverhalten zu beschreiben. Allerdings ist die vorgeschlagene Ansatzfunktion $f_2(r)$ für die Hydratationsentwicklung experimentell nicht ausreichend abgesichert. Außerdem bringt der verwendete Reaktionsgrad r gegenüber dem Hydratationsgrad α als Bezugsgröße die in Abschnitt 2.3.3.7 aufgeführten Nachteile mit sich. Das Ansatzkonzept nach [168] ist im Programmpaket DIANA, das in der vorliegenden Arbeit für Vergleichs- und Beispielrechnungen verwendet wurde, implementiert. Dabei wird die Funktion $f_2(r)$ vom Benutzer über beliebige Stützstellen r_i als Polygonzug durch die Werte $f_2(r_i)$ vorgegeben. Diese Vorgehensweise erlaubt es, die beschriebenen Nachteile zu umgehen, indem anstatt r der Hydratationsgrad α verwendet und die Funktion $f_2(\alpha)$ aus dem Ansatz von Jonasson abgeleitet wird.

Beim Ersetzen der Bezugsgröße ist zu beachten, daß die ursprüngliche Definition des Reaktionsgrades r davon ausgeht, daß für $r = 0$ bereits 10 % der gesamten Hydratationswärmemenge Q_∞ freigesetzt sind (entsprechend einem Hydratationsgrad $\alpha = 0.1$). Deshalb muß mit einer modifizierten Hydratationswärmemenge \tilde{Q}_∞ als Eingangsparameter für das Programm gearbeitet werden:

$$\tilde{Q}_\infty = \frac{Q_\infty}{0,9} \quad (\text{B.12})$$

Es sei an dieser Stelle nochmals betont, daß dieses Vorgehen schon deshalb notwendig ist, um die Temperaturzustände im Programm DIANA richtig zu erfassen, da intern nur 90 % des eingegebenen Wertes verwendet werden. Vergleicht man den Ansatz von Reinhardt et al. (siehe Abschnitt 2.3.3.7, Gleichung (2.26))

$$q(r) = F \cdot f_1(\vartheta) \cdot f_2(r) \quad (\text{B.13})$$

mit der allgemeinen Form des Produktansatzes (Abschnitt 2.3.4.2, Gleichungen (2.36) und (2.38))

$$q = Q_\infty \cdot \dot{\alpha} = Q_\infty \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_w} \cdot \frac{\partial \tau_w}{\partial t}, \quad (\text{B.14})$$

so erkennt man, daß die gesuchte Funktion $f_2(\alpha)$ auf Grundlage des Ansatzes nach Jonasson der Funktion $f(\alpha)$ entspricht, die bereits in Anhang B.2 verwendet wurde. Da f_2 nach [168] auf den Maximalwert 1.0 zu normieren ist, können direkt die Werte aus Tabelle B.1 verwendet werden:

$$q(\alpha) = F \cdot f_1(\vartheta) \cdot \frac{f(\alpha)}{\max f(\alpha)} \tag{B.15}$$

Da die von Reinhardt et al. vorgeschlagene Arrhenius-Funktion $f_1(\vartheta)$ (Gleichung (2.29)) zum Vergleich mit dem Produktansatz nach Gleichung (B.14) so skaliert werden muß, daß sie bei $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ den Wert 1.0 annimmt (vgl. Abb. 2-10 auf Seite 25), erhält man den Beiwert F folgendermaßen:

$$F = Q_\infty \frac{\max f(\alpha)}{f_1(20)} = Q_\infty \frac{\max f(\alpha)}{1,2782 \cdot 10^{-9}} \tag{B.16}$$

Die Berechnung erfolgt dann mit dem fiktiven Bezugswert \tilde{r} , der sich durch Umrechnung aus dem Hydratationsgrad α ergibt:

$$\tilde{r} = 0,9\alpha + 0,1 \quad \text{mit} \quad \tilde{r} \in [0,1;1] \quad \text{und} \quad \alpha \in [0;1] \tag{B.17}$$

Die Tabellenwerte aus Anhang B.2 können beibehalten werden, müssen jedoch auf eine umgerechnete Bezugsachse transformiert werden, wobei für den Bereich $\tilde{r} < 0,1$ die Wärmefreisetzung Null gesetzt wird, da $\tilde{r} = 0,1$ den Hydratationsbeginn markieren soll. In Abb. B-4 ist dies graphisch veranschaulicht.

Speziell beim Programm DIANA ist zu beachten, daß die errechneten Werte r in den Hydratationsgrad zurückgerechnet werden müssen, da nunmehr der Ausgabebereich des Reaktionsgrades $\tilde{r} \in [0,1;1]$ dem gesamten Hydratationszeitraum $\alpha \in [0;1]$ entspricht:

$$\alpha = (\tilde{r} - 0,1)/0,9 \tag{B.18}$$

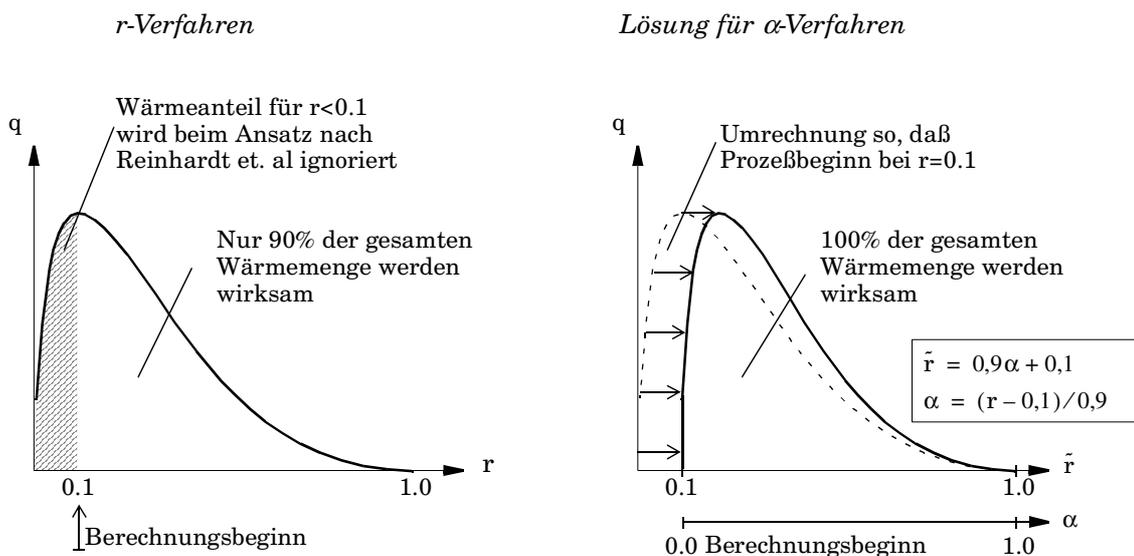


Abb. B-4: Vorgehen bei Programmen, die mit dem Reaktionsgrad r nach [168] arbeiten (z.B. DIANA).

Bei der Eingabe als Polygonzug über diskrete Stützstellen r_i ist darauf zu achten, daß im Bereich großer Veränderlichkeiten der Wärmefreisetzung eine ausreichend feine Unterteilung vorhanden ist.

| Eigenschaft | Beton <i>LI</i> | Beton <i>RI</i> | Beton <i>R2</i> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|----------------------|----------------------|
| $\tilde{Q}_\infty = Q_\infty/0,9$ [kJ/m ³] | 186333 | 150833 | 117711 |
| <i>Stützstellen und Funktionswerte des Hydratationsansatzes $f(\tilde{r})$ nach Jonasson</i> | | | |
| $\tilde{r} = 0,9\alpha + 0,1$ | $f(\tilde{r})/(\max f(\tilde{r}))$ | | |
| 0.0 bis 0.1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.109 | 0.4601 | 0.4469 | 0.3722 |
| 0.118 | 0.6459 | 0.6352 | 0.5481 |
| 0.127 | 0.7629 | 0.7553 | 0.6679 |
| 0.136 | 0.8429 | 0.8380 | 0.7559 |
| 0.145 | 0.8993 | 0.8964 | 0.8224 |
| 0.154 | 0.9390 | 0.9376 | 0.8735 |
| 0.163 | 0.9665 | 0.9661 | 0.9127 |
| 0.172 | 0.9846 | 0.9847 | 0.9426 |
| 0.180 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9648 |
| 0.190 | 1.000 | 1.000 | 0.9708 |
| 0.208 | 0.9958 | 0.9946 | 0.9976 |
| 0.226 | 0.9784 | 0.9750 | 1.0000 |
| 0.244 | 0.9516 | 0.9455 | 0.9891 |
| 0.262 | 0.9183 | 0.9090 | 0.9705 |
| 0.280 | 0.8805 | 0.8678 | 0.9452 |
| 0.325 | 0.7743 | 0.7530 | 0.8625 |
| 0.370 | 0.6622 | 0.6330 | 0.7638 |
| 0.460 | 0.4481 | 0.4088 | 0.5542 |
| 0.550 | 0.2693 | 0.2295 | 0.3603 |
| 0.640 | 0.1364 | 0.1051 | 0.2025 |
| 0.730 | 0.0513 | 0.0339 | 0.0901 |
| 0.820 | 0.0101 | 0.0051 | 0.0252 |
| 0.900 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0018 |
| <i>Skalierungswert F</i> | | | |
| $F = Q_\infty \frac{\max f(\tilde{r})}{f_1(20)}$ | $0.99647 \cdot 10^9$ | $0.56607 \cdot 10^9$ | $0.21483 \cdot 10^9$ |

Tabelle B.3: Isotherme Wärmefreisetzung der Betone *LI*, *RI* und *R2*.

Anhang C

Ergänzungen zum viskoelastischen Stoffgesetz

C.1 Inkrementelle Formulierung

C.1.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt werden die inkrementellen Gleichungen zum viskoelastischen Stoffgesetz für Schädigungs- und Erhärtungsphänomene angegeben, das in Kapitel 4 vorgestellt wurde. Die Ableitung erfolgt analog zu dem von de Borst und van den Boogaard [25] angegebenen Verfahren. Allerdings werden hier die elastischen und viskosen Anteile an den Verzerrungsraten getrennt betrachtet, um die Gleichungen übersichtlicher zu halten. Mit der dimensionslosen Matrix \mathbf{C} läßt sich Gleichung (4.25) für mehrdimensionale Spannungszustände schreiben (vgl. Abb. 4-8):

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \int_0^t \mathbf{J}(t, \tau) \mathbf{C}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (\text{C.1})$$

Die Zeitableitung dieser Volterraschen Integralgleichung liefert die Verzerrungsrate entsprechend Gleichung (4.27), die jedoch für die inkrementelle Darstellungsweise nicht weiter benötigt wird. Prinzipiell ergibt sich die inkrementelle Formulierung direkt aus Gleichung (C.1):

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(t_{i+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}(t_i) \quad (\text{C.2})$$

C.1.2 Reine Erhärtungsphänomene

Setzt man in die Gleichungen (C.1) und (C.2) die Definition der Nachgiebigkeit nach Gleichung (4.22) ein, so ergeben sich die inkrementellen viskoelastischen Verzerrungszuwächse:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}(t_{i+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}(t_i) = \int_0^{t_{i+1}} \frac{1 + \varphi(t_{i+1}, \tau)}{E(\tau)} \mathbf{C}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau - \int_0^{t_i} \frac{1 + \varphi(t_i, \tau)}{E(\tau)} \mathbf{C}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{t_i} \frac{1 + \varphi(t_{i+1}, \tau) - 1 - \varphi(t_i, \tau)}{E(\tau)} \mathbf{C}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{1 + \varphi(t_{i+1}, \tau)}{E(\tau)} \mathbf{C}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

Betrachtet man zunächst den elastischen Anteil, so erhält man:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \int_0^{t_{i+1}} \mathbf{D}(\tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau - \int_0^{t_i} \mathbf{D}(\tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{D}(\tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau \cong \mathbf{D}\left(t_{i+\frac{1}{2}}\right) \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{C.4})$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^e$$

Die bei Erhärtungsphänomenen anzusetzenden Anteile der viskosen Verzerrungsraten lauten:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^\varphi = \int_0^{t_{i+1}} \varphi(t_{i+1}, \tau) \mathbf{D}(\tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau - \int_0^{t_i} \varphi(t_i, \tau) \mathbf{D}(\tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^{t_i} [\varphi(t_{i+1}, \tau) \mathbf{D}(\tau) - \varphi(t_i, \tau) \mathbf{D}(\tau)] \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t_{i+1}, \tau) \mathbf{D}(\tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^{t_i} \Delta \varphi \mathbf{D}(\tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t_{i+1}, \tau) \mathbf{D}(\tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (\text{C.5})$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^\varphi \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_3^\varphi$$

Zum Vergleich ist nachstehend der Term angegeben, der von de Borst und van den Boogaard [25] für die inkrementellen Dehnungszuwächse bei Erhärtungsvorgängen abgeleitet wurde. Die Äquivalenz zu der Summe aus den oben abgeleiteten elastischen und viskosen Anteilen läßt sich leicht zeigen.

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^{t_i} [\mathbf{J}(t_{i+1}, \tau) - \mathbf{J}(t_i, \tau)] \mathbf{C}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{J}(t_{i+1}, \tau) \mathbf{C}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau \quad (\text{C.6})$$

C.1.3 Verallgemeinerte Theorie

Die verallgemeinerte Theorie gemischter Erhärtungs- und Schädigungsphänomene geht von der isotropen Veränderung der Materialsteifigkeit mit dem Erhärtungsgrad β und dem Schädigungsgrad δ nach Abschnitt 4.2.7 aus:

$$\mathbf{E}(t) = \beta(t)[1 - \delta(t)] \bar{\mathbf{E}} \quad (\text{C.7})$$

Entsprechend den Erläuterungen in Kapitel 4 erhält man die Gleichungen der verallgemeinerten Theorie, indem lediglich die Veränderung des Schädigungsgrades spannungswirksam angesetzt wird. Die Änderung der inversen Werkstoffmatrix \mathbf{D} kann somit analog zu Gleichung (4.55) folgendermaßen beschrieben werden:

$$\Delta \mathbf{D} = \mathbf{D}(t_{i+1}) - \mathbf{D}(t_i) \rightarrow \frac{1}{1 - \delta_{i+1}} - \frac{1}{1 - \delta_i} \frac{\mathbf{C}^{-1}}{\beta_{i+1} \bar{\mathbf{E}}} = \frac{\Delta \delta}{1 - \delta(t_i)} \mathbf{D}(t_{i+1}) \quad (\text{C.8})$$

Demnach ergibt sich das inkrementelle Stoffgesetz für die elastischen Verzerrungen:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e &= \int_0^{t_{i+1}} \mathbf{D}(t_{i+1}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau - \int_0^{t_i} \mathbf{D}(t_i) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau \\ &= [\mathbf{D}(t_{i+1}) - \mathbf{D}(t_i)] \int_0^{t_i} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau + \mathbf{D}(t_{i+1}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau \\ &= \frac{\Delta \delta}{1 - \delta(t_i)} \mathbf{D}(t_{i+1}) \boldsymbol{\sigma}(t_i) + \mathbf{D}(t_{i+1}) \Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(t_{i+1}) \frac{\Delta \delta}{1 - \delta(t_i)} \boldsymbol{\sigma}(t_i) + \Delta \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_2^e \qquad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^e$

Für die Umsetzung in einen FE-Algorithmus ist die inverse Beziehung erforderlich. Die Umformung nach den Spannungszuwächsen lautet:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(t_{i+1})^{-1} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e - \frac{\Delta \delta}{1 - \delta(t_i)} \mathbf{D}(t_{i+1}) \boldsymbol{\sigma}(t_i) = \mathbf{D}(t_{i+1})^{-1} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e - \frac{\Delta \delta}{1 - \delta(t_i)} \boldsymbol{\sigma}(t_i) \quad (\text{C.10})$$

$\mathbf{E}(t_{i+1}) \qquad \rightarrow \Delta \mathbf{P}_{\text{int}}$

Man sieht somit die Auswirkung der Schädigung als Freiwerden von Spannungen, welche als Beitrag zur rechten Seite in das Gleichungssystem eingehen (vgl. Gleichung (5.42) auf Seite 89). Für die Ableitung der inkrementellen viskosen Verzerrungen wird Gleichung (4.54) umgeformt und die Abkürzung $\tilde{\mathbf{D}}(t, \tau)$ eingeführt:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\varphi(t) = \int_0^t \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) \varphi(t, \tau) \mathbf{D}(\tau) + \int_\tau^t \varphi(t, \tilde{t}) \frac{\dot{\delta}(\tilde{t})}{1 - \delta(\tilde{t})} \mathbf{D}(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad d\tau \quad (\text{C.11})$$

$\tilde{\mathbf{D}}(t, \tau)$

Somit ergibt sich der viskose Verzerrungszuwachs:

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^\varphi &= \int_0^{t_{i+1}} \tilde{\mathbf{D}}(t_{i+1}, \tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau - \int_0^{t_i} \tilde{\mathbf{D}}(t_i, \tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau \\
&= \int_0^{t_i} [\tilde{\mathbf{D}}(t_{i+1}, \tau) - \tilde{\mathbf{D}}(t_i, \tau)] \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{\mathbf{D}}(t_{i+1}, \tau) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{C.12}$$

C.2 Thermodynamische Überlegungen

Im diesem ergänzenden Abschnitt wird keine strenge Ableitung aus der Thermodynamik angestrebt. Es soll vielmehr in einer einfachen Darstellung gezeigt werden, daß die in Abschnitt 4.2 mechanisch begründeten Zusammenhänge des unterschiedlichen elastischen Verhaltens bei Aufweichung und Erhärtung auch mit den Hauptsätzen der Thermodynamik begründet werden können. Bažant [9] hat dies bereits 1979 in einem Aufsatz prinzipiell dargelegt, auf den die nachfolgenden Überlegungen aufbauen. Er macht dort auch deutlich, daß eine strenge Beweisführung im vorliegenden Fall des hydratisierenden Betons nicht ohne weiteres möglich ist, da einerseits eine nicht verallgemeinerbare Änderung der thermischen Zustandsgrößen stattfindet, und zum anderen die thermodynamischen Gesetzmäßigkeiten nicht unmittelbar auf zeitveränderliche Materialeigenschaften anwendbar sind. Letzteres Problem wird umgangen, indem die Steifigkeitsänderung als Änderung der Werkstoffzusammensetzung aus zeitinvarianten Komponenten aufgefaßt wird. Dies führt zur Deutung der Steifigkeitsänderung als Volumenzuwachs der erhärteten Phase (vgl. Abschnitt 4.3.3.2):

$$E(t) \rightarrow \beta(t) \cdot E \tag{C.13}$$

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik besagt, daß in einem abgeschlossenen System die Entropie S nicht abnehmen kann, wenn von außen keine Energie zugeführt wird. Ein reversibler Prozeß ist dadurch gekennzeichnet, daß die Entropieänderung ΔS verschwindet, wohingegen bei einem irreversiblen Prozeß die Entropie zunimmt:

$$\begin{array}{ll}
\text{Reversibler Prozeß:} & \Delta S = 0 \\
\text{Irreversibler Prozeß:} & \Delta S > 0
\end{array}$$

Allgemein kann der Energiezustand eines abgeschlossenen mechanischen Systems in Abhängigkeit des Dehnungs- und Entropiezustandes charakterisiert werden:

$$E = E(\varepsilon_{ij}, S)$$

Da das Bezugsniveau für die absolute Energie nicht feststeht, ist letztendlich nur die Änderung des Energiezustandes bedeutsam:

$$dE = dQ + dW \tag{C.14}$$

Die Aufteilung in eine Änderung des Wärmezustandes dQ und des mechanischen Energiezustandes dW läßt sich mit der Definitionsgleichung der Entropie

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad (\text{C.15})$$

auch folgendermaßen schreiben:

$$dE = T \cdot dS + dW \quad (\text{C.16})$$

Bei isothermen Prozessen ist die Temperatur konstant und die sogenannte freie Energie F stellt im elastischen Fall ein Potential des mechanischen Energiezustandes dar:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (\text{C.17})$$

Bei adiabaten Verhältnissen bleibt die Hydratationswärme im System erhalten, woraus folgt:

$$dQ = 0 \quad dS = 0 \quad (\text{C.18})$$

Somit stellt die mechanische Energie W im elastischen Fall ein echtes Potential dar:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (\text{C.19})$$

Treten inelastische Effekte auf, so geht ein Teil der mechanischen Energie 'verloren', d.h. dieser Teil ist nicht mehr als mechanische Arbeit nutzbar. Aus dem zweiten Hauptsatz und Gleichung (C.16) kann gefolgert werden, daß diese sogenannte Energiedissipationsrate \dot{W}_D nicht negativ sein darf [9]:

$$\dot{W}_D \geq 0 \quad (\text{C.20})$$

Im folgenden soll ohne strengen Beweis für den einaxialen Fall möglichst anschaulich gezeigt werden, daß dieses Kriterium ebenfalls die Einschränkung der konstitutiven Gleichungen (4.13) und (4.15) auf Erhärtungs- bzw. Schädigungsphänomene bedingt.

a) *Hyperelastisches Verhalten*: $\sigma = E\varepsilon$

Bei zeitlich unveränderlicher Steifigkeit ist das hyperelastische Verhalten einer Feder ein reversibler Prozeß ohne Energiedissipation. Die Verzerrungsenergie W stellt ein echtes Potential dar.

b) *Schädigung*: $\sigma = E(t)\varepsilon$

Die innere Energie einer Feder mit der konstitutiven Beziehung $\sigma = E(t)\varepsilon$ lautet:

$$W = \frac{\sigma^2}{2E(t)} \quad (\text{C.21})$$

Damit erhält man die zeitliche Änderung des Energiezustandes aus einem Anteil der Spannungsänderung \dot{W}_{el} und einem inelastischen Anteil aus der Änderung der Steifigkeit \dot{W}_D , der die Energie-dissipation repräsentiert (Abb. C-1a):

$$\dot{W} = \underbrace{\frac{\sigma \dot{\sigma}}{E(t)}}_{\dot{W}_{el}} + \underbrace{-\frac{\sigma^2 \dot{E}(t)}{2E(t)^2}}_{\dot{W}_D} \quad (C.22)$$

Mit Gleichung (C.20) ergibt sich direkt, daß eine hyperelastische Formulierung, die auf Gleichung (4.13) führt, nur für Schädigungsphänomene anwendbar ist: $\dot{E} \leq 0$

b) Erhärtung: $\dot{\sigma} = E(t)\dot{\epsilon}$

Die Änderung des Energiezustandes unter Anwendung von $\dot{\sigma} = E(t)\dot{\epsilon}$ kann graphisch aus Abb. C-1b am Beispiel einer Entlastung abgelesen werden. Das Energieniveau im Zustand A bei der Steifigkeit E_0 ist gekennzeichnet durch die Fläche O-A- ϵ_A . Nach einer Erhärtung stellt sich bei einer Entlastung der Zustand B ein, dessen Potential durch die Fläche $\tilde{\epsilon}$ -B- ϵ_B repräsentiert wird:

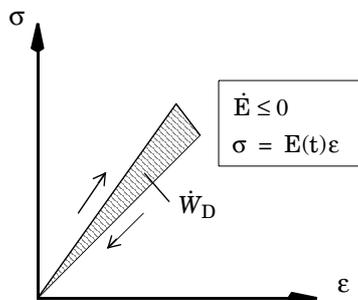
$$W = \int \sigma d\epsilon = \int \sigma E_1 d\sigma \quad (C.23)$$

$\tilde{\epsilon}$ stellt dabei die irreversible Dehnung nach einer vollständigen Entlastung bei der Steifigkeit E_1 dar. Da die durch die Fläche A-B- ϵ_B - ϵ_A repräsentierte Energie infolge der Entlastung mechanisch freigesetzt wird, stellt die Fläche O-A- $\tilde{\epsilon}$ die dissipierte Energie dar. Somit gilt:

$$\dot{W}_D = \frac{1}{2}\sigma\epsilon - \frac{1}{2}\sigma(\epsilon - \tilde{\epsilon}) = \frac{1}{2}\sigma^2 \left(\frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_1} \right) \geq 0 \quad E_1 \geq E_0 \quad (C.24)$$

Eine andere anschauliche Konsequenz ist, daß die inelastische Dehnung $\tilde{\epsilon}$ dasselbe Vorzeichen wie die Spannung haben muß, was z.B. bedeutet, daß aus einer Druckbeanspruchung nach der Entlastung keine bleibende positive Dehnung entstehen kann. Bei Erhärtungsphänomenen in Beton führt diese scheinbare Dissipation nicht sofort zur Erwärmung, sondern zu einem mikrostrukturellen Eigenspannungszustand (vgl. Abschnitt 4.2.6).

a) Aufweichen



b) Erhärtung

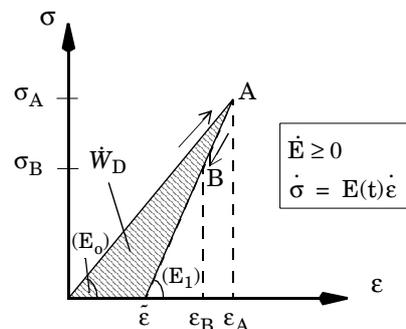


Abb. C-1: Dissipierte Energieraten bei a) Aufweichung und b) Erhärtung.

Anhang D

Ergänzungen zum normenorientierten Rißmodell

D.1 Anwendung auf Grundlage anderer Normen

In diesem Teil sollen die Konzepte zur Rißbreitenbeschränkung der Normen Model Code 90 [43] und DIN 1045-1 [52] dargestellt und denen nach DIN 1045 [51] bzw. EC2 [65], die in Kapitel 6 vorgestellt wurden, gegenübergestellt werden. Ziel ist es, die Übertragbarkeit des Bewehrungs-Riß-Elementes aus Kapitel 6 zu zeigen.

D.1.1 Model Code 1990

Nach dem Model Code 90 [43] ist die charakteristische Rißbreite mit der maximalen rißwirksamen Strecke $l_{s,max}$ zu berechnen:

$$w_k = l_{s,max}(\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}) \quad (D.1)$$

Nachdem der mittlere Rißabstand mit

$$s_{rm} \cong \frac{2}{3} l_{s,max} \quad (D.2)$$

angegeben wird, kann auch die mittlere Rißbreite abgeschätzt werden durch

$$w_m = s_{rm}(\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm}) \cong \frac{2}{3} w_k . \quad (D.3)$$

Für die rißwirksame Differenzdehnung von Beton und Stahl wird angegeben:

$$\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = \epsilon_{s2} - \beta_r \cdot \epsilon_{sr2} \quad (D.4)$$

Für Zwang vereinfacht sich diese Gleichung:

$$\epsilon_{sm} - \epsilon_{cm} = \epsilon_{sr2}(1 - \beta_r) \quad (D.5)$$

Der Wert β_r ist entweder mit 0.6 für den Erstrißbereich und für Kurzzeitbelastungen oder mit 0.38 für abgeschlossene Rißbildung und langandauernde Belastung anzusetzen. Die Stahldehnung im Riß unter der Rißschnittgröße ϵ_{sr2} ergibt sich unter Berücksichtigung der bereits vor dem Riß vorhandenen Dehnung $\epsilon_{s1} = \epsilon_{cu} = f_{ctm}(t)/E_c(t)$:

$$\varepsilon_{sr2} = \frac{f_{ctm}(t)}{\rho_{ef} \cdot E_s} + \varepsilon_{s1} = \frac{f_{ctm}(t)}{\rho_{ef} \cdot E_s} \left(1 + \frac{E_s}{E_c(t)} \cdot \rho_{ef} \right) \quad (D.6)$$

Den maximal wirksamen Rißabstand $l_{s,max}$ erhält man aus

$$l_{s,max} = 2 \cdot s_r = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sigma_{s2} - \sigma_{s1}}{\tau_{bk}} \cdot \varnothing_s \quad (D.7)$$

mit der Rißschnittgröße

$$(\sigma_{s2} - \sigma_{s1}) \cdot A_s = f_{ctm}(t) \cdot A_c = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{f_{ctm}(t)}{\tau_{bk}(t)} \cdot \frac{\varnothing_s}{\rho_{ef}} \quad (D.8)$$

Dies entspricht genau der Überlegung zur Krafteinleitung der Rißschnittgröße aus Abb. 6-4, allerdings ohne Berücksichtigung des Bereiches k_0 . Anders ausgedrückt wird die Verbundspannung zwischen Beton und Stahl auf einen etwas längeren Bereich verschmiert (vgl. Abb. 6-3). Für die abgeschlossene Rißbildung wird Gleichung (D.8) vereinfacht mit $\tau_{bk} = 1,8 \cdot f_{ctm}$:

$$l_{s,max}^{AR} = \frac{1}{3,6\rho_{ef}} \varnothing_s \quad (D.9)$$

Bei der Erstrißbildung und ständiger Last wird τ_{bk} mit $1,35 \cdot f_{ctm}(t)$ angegeben. Damit erhält man:

$$l_{s,max}^{ER} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1,35 \cdot \frac{\varnothing_s}{\rho_{ef}} = \frac{1}{2,7\rho_{ef}} \varnothing_s \quad (D.10)$$

Bei großen Rißabständen entspricht dies sehr gut $l_{max} \cong 2 \cdot s_r$ nach Gleichung (6.11). Bei kleineren Rißabständen, d.h. bei kleinen Stabdurchmessern und hohen Bewehrungsgraden entstehen Differenzen aufgrund des Fehlens von k_0 .

Die in MC 90 angegebene Formel zur direkten Berechnung der Rißbreite bzw. der Bewehrungsmenge

$$A_s = \sqrt{\frac{\varnothing_s \cdot F_{cr} \cdot (F_s - \beta F_{cr})}{2 \cdot E_s \cdot w_k \cdot \tau_{bk} \cdot \left(1 + \frac{E_s}{E_c} \cdot \rho_{ef} \right)}} \approx 1 \quad (D.11)$$

läßt sich für den Fall der Erstrißbildung ($\beta_r = 0,6$; $\tau_{bk} = 1,35 \cdot f_{ctm}$) mit $F_s \cong F_{cr}$ umformen in:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{2 \cdot E_s \cdot w_k \cdot 1,35 \cdot f_{ctm}}{\varnothing_s \cdot 0,4}} \quad (D.12)$$

Mit $w_k = 1,5 \cdot w_m$ erhält man:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{10,1 \cdot E_s \cdot w_m \cdot f_{ctm}}{\varnothing_s}} \quad (D.13)$$

Vernachlässigt man σ_{sr1} und setzt wie bereits erwähnt $k_0 = 0$, so entspricht dies exakt Gleichung (6.31), die in Kapitel 6 zur Ableitung des Federgesetzes herangezogen wurde. Bis auf den Bereich kleiner Rißabstände, bei denen k_0 einen großen Einfluß hat, entspricht die Regelung in MC 90 unter den genannten Voraussetzungen also den Ausführungen in Kapitel 6. Die dort abgeleiteten konstitutiven Beziehungen können analog angewendet werden.

D.1.2 DIN 1045-1

Im Gegensatz zur Fassung vom Februar 1997 des Entwurfs zur DIN 1045-1 unterscheidet sich die Regelung zur Berechnung der Rißbreite in der aktuellen Fassung des Entwurfes zur DIN 1045-1 [52] kaum von der im vorherigen Abschnitt dargestellten Regelung nach MC90. Es gilt somit das dort Gesagte sinngemäß.

D.2 Näherung für das diskrete Bewehrungs-Riß-Modell mit Federelementen

Besteht bei der Verwendung eines kommerziellen FE-Programmes nicht die Möglichkeit, das in Abschnitt 6.3 abgeleitete Stoffgesetz vorzugeben, so kann mit dem nachfolgend beschriebenen Verfahren eine für baupraktische Belange ausreichend genaue Näherung erzielt werden. Die Vereinfachung basiert auf den folgenden Annahmen:

- Das Stadium der Erstrißbildung wird nicht verlassen.
- Das Bewehrungs-Riß-Element wird nicht, wie in Kapitel 5 dargestellt, um k_0 versetzt zu den Rißufern des diskreten Risses verankert, sondern unmittelbar an den Rißufern. Das Element hat damit im ungerissenen System keine oder nur eine minimale Ausdehnung.
- Die Spannung im Stahl vor dem Riß wird vernachlässigt gegenüber der Spannung im gerissenen Zustand.
- Die echte Arbeitslinie wird durch eine trilineare Linie approximiert.

Aus Gleichung (6.12) erhält man die Sekantensteifigkeit des Federelementes:

$$C_{\text{sek}}(w) = \frac{F_s}{w} = \frac{E_s A_s}{0,5 k_0 + 0,25 \frac{F_s \cdot \varnothing_s}{\tau_m \cdot A_s}} \quad (\text{D.14})$$

Die Stahzugkraft im Riß ergibt sich in Abhängigkeit der Rißbreite durch Umformung von Gleichung (D.14):

$$F_s = \frac{2 \cdot A_s \cdot \sqrt{\tau_m} \cdot (\sqrt{k_0^2 \cdot \tau_m + 2 \cdot \varnothing_s \cdot E_s \cdot w - k_0 \sqrt{\tau_m}})}{\varnothing_s} \quad (\text{D.15})$$

Setzt man nun Gleichung (6.5) in diese Beziehung ein, so erhält man das gesuchte Federgesetz für die Verbundwirkung:

$$F_s(w) = 2,5 \frac{A_s f_{ctm}}{\varnothing_s} \left(\sqrt{k_0^2 + 1,6 \cdot \varnothing_s \cdot E_s \cdot w / f_{ctm}} - k_0 \right) \quad (D.16)$$

Gleichung (D.16) beschreibt ein Element, das für jede Rißöffnung w in Höhe des Bewehrungsstahls diejenige Stahlzugkraft über den Riß überträgt, welche durch die Rißformel entsprechend der Norm festgelegt ist. Dividiert man Gleichung (D.16) durch A_s , so ergibt sich auch ein direkter Zusammenhang zwischen Stahlspannung und Rißbreite. In Abb. D-1 und D-2 sind diese Zusammenhänge für verschiedene Bewehrungsmengen und Durchmesser über die Rißbreite aufgetragen.

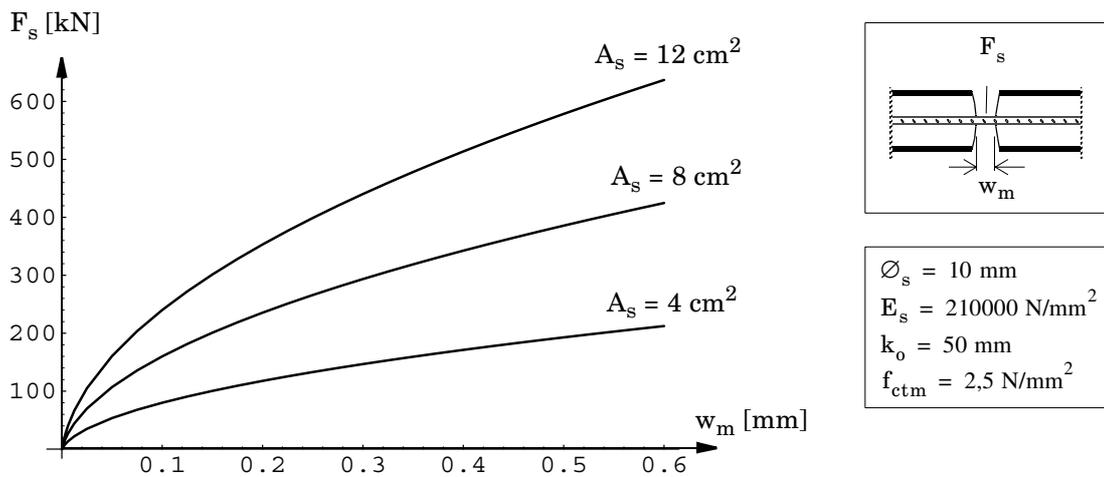


Abb. D-1: Federkennlinie nach Gleichung (D.16).

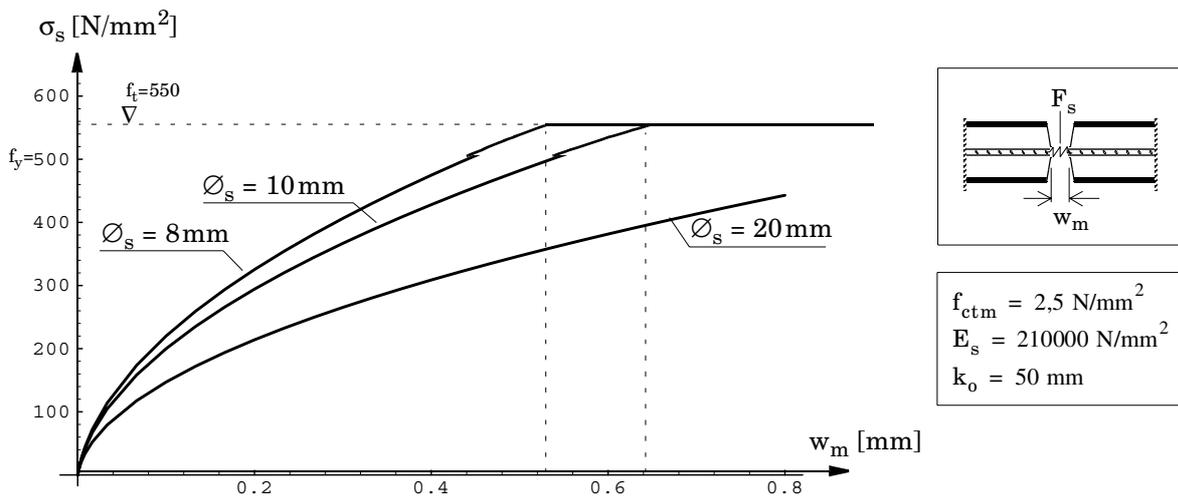


Abb. D-2: Zusammenhang zwischen Stahlspannung im Riß und Rißbreite nach dem verwendeten Rißgesetz.

Der Verlauf läßt sich wie in Abb. D-3 dargestellt durch Stützstellen als Geradenzug approximieren. Dieser Geradenzug kann als Parallelschaltung zweier Federn mit Fließgrenze abgebildet werden (Abb. D-3).

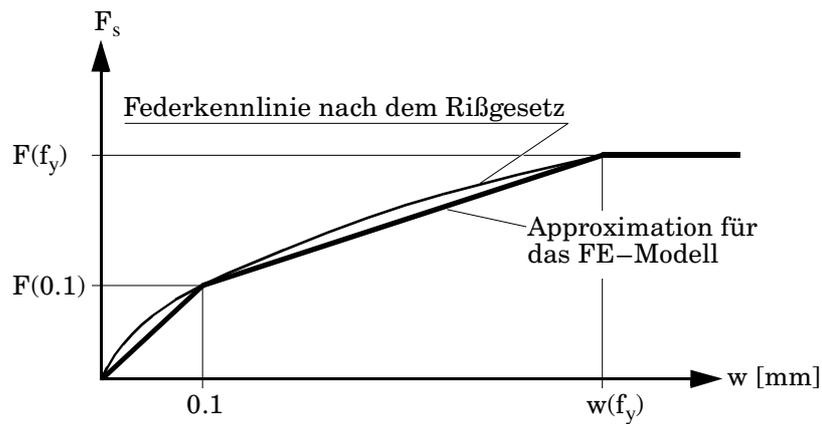


Abb. D-3: Approximation der nichtlinearen Federkennlinie.

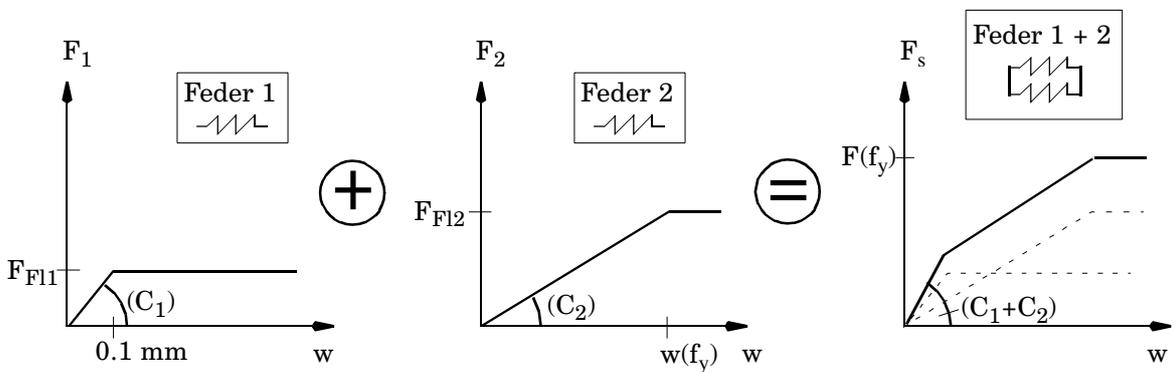


Abb. D-4: Zusammensetzen der trilinearen Federkennlinie aus zwei bilinearen Federn.

Die einzelnen Federkonstanten und Fließgrenzen der Federn können wie folgt berechnet werden:

$$F_s = \frac{5\pi}{8} \varnothing_s f_{ctm} (\sqrt{k_0^2 + 1,6 \cdot \varnothing_s \cdot E_s \cdot w_m / f_{ctm}} - k_0) \quad [\text{N}] \quad (\text{D.17})$$

$$w_m(f_y) = 0,5 \frac{f_y}{E_s} k_0 + 0,2 \varnothing_s \frac{f_y}{f_{ctm}} \quad [\text{mm}] \quad (\text{D.18})$$

Je Bewehrungsstab ergeben sich demnach folgende Federkennwerte:

$$C_2 = \frac{F(w(f_y)) - F(0,1 \text{ mm})}{w(f_y) - 0,1 \text{ mm}} \quad [\text{N/mm}] \quad (\text{D.19})$$

$$C_1 = \frac{F(0,1 \text{ mm})}{0,1 \text{ mm}} - C_2 \quad [\text{N/mm}] \quad (\text{D.20})$$

$$F_{F11} = C_1 \cdot 0,1 \text{ mm} \quad [\text{N}] \quad (\text{D.21})$$

$$F_{F12} = C_2 \cdot w_m(f_y) \quad [\text{N}] \quad (\text{D.22})$$

Die Werte sind in Tabelle D.1 für ausgewählte Parameter tabelliert.

| \varnothing_s [mm] | f_{ctm} [N/mm ²] | $w_m(f_y)^*$ [mm] | C_1^{**} [N/mm] | F_{F11}^{**} [N] | C_2^{**} [N/mm] | F_{F12}^{**} [N] |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| 1 $\varnothing 6$ | 1,0 | 0.8125 | 32690 | 3269 | 13376 | 10868 |
| | 2,0 | 0.4376 | 38700 | 3870 | 23468 | 10267 |
| | 3,0 | 0.3125 | 41515 | 4151 | 31954 | 9986 |
| 1 $\varnothing 10$ | 1,0 | 1.3125 | 77687 | 7769 | 24001 | 31501 |
| | 2,0 | 0.6875 | 95428 | 9543 | 43240 | 29717 |
| | 3,0 | 0.4792 | 105164 | 10516 | 60007 | 28754 |
| 1 $\varnothing 12$ | 1,0 | 1.5625 | 105246 | 10525 | 29455 | 46024 |
| | 2,0 | 0.8125 | 130760 | 13076 | 53505 | 43473 |
| | 3,0 | 0.5625 | 145310 | 14531 | 74698 | 42018 |
| 1 $\varnothing 16$ | 1,0 | 2.0625 | 169090 | 16909 | 40544 | 83622 |
| | 2,0 | 1.0625 | 213518 | 21352 | 74522 | 79179 |
| | 3,0 | 0.7292 | 240134 | 24013 | 104938 | 76518 |
| 1 $\varnothing 20$ | 1,0 | 2.5625 | 243334 | 24333 | 51803 | 132746 |
| | 2,0 | 1.3125 | 310747 | 31075 | 96004 | 126005 |
| | 3,0 | 0.8958 | 352408 | 35241 | 136006 | 121839 |
| Konstante Größen: $E_s = 200000$ MPa, $f_y = 500$ MPa, $k_o = 50$ mm | | | | | | |
| * $w_m(f_y)$ ist unabh. von der Bewehrungsmenge und von der Anzahl der Bewehrungsstäbe | | | | | | |
| ** Federsteifigkeiten und Fließkräfte mit der Anzahl der Bewehrungsstäbe multiplizieren | | | | | | |

Tabelle D.1: Kennwerte für die Anwendung des Bewehrungsmodells in kommerziellen FE-Programmen.

Literaturverzeichnis

- [1] Argyris, J. H.; Szimmat, J.; Willam, K. J.: Finite Elemente zur thermomechanischen Berechnung von Massivbauten. In: Finite Elemente in der Baupraxis 1978, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1978.
- [2] Argyris, J. H.; Warnke, E. P.; Willam, K. J.: Berechnung von Temperatur- und Feuchtefeldern in Massivbauten nach der Methode der Finiten Elemente. Heft 278 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin, 1977.
- [3] Baker, G.; Stabler, J.: Computational modelling of thermally induced fracture in concrete. In: [26], S. 467-480.
- [4] Bangash, M. Y. H.: Concrete and Concrete Structures - Numerical Modelling and Applications. Elsevier Applied Science, London, 1989.
- [5] Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methode. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [6] Baumann, T.: Risse in wasserundurchlässigen Bauwerken aus Beton. In: Festschrift Prof. Dr.-Ing. Eber. TU München, 1990.
- [7] Bažant, Z. P.: Theory of creep and shrinkage in concrete structures: A précis of recent developments. Mechanics Today (2), S. 1-93, Pergamon Press, New York, 1975.
- [8] Bažant, Z. P.: Mathematical models for creep and shrinkage of concrete. In: [18].
- [9] Bažant, Z. P.: Thermodynamics of solidifying or melting viscoelastic material. Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 105, 6/1979, S. 933-952, ASCE, 1979.
- [10] Bažant, Z. P.: Viscoelasticity of solidifying porous materials – Concrete. Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 103, 12/1977 und Vol 105, 10/1979, S. 725-728, ASCE, 1977/1979.
- [11] Bažant, Z.P.: Guidelines for characterizing concrete creep and shrinkage on structural design codes or recommendations, Materials and Structures, Vol. 28, S. 52-55, 1995.
- [12] Bažant, Z. P.; Carol, I. (Ed.): Creep and shrinkage of concrete. Proceedings of the International RILEM-Symposium, Paris, 1993.
- [13] Bažant, Z. P.; Chern, J.-C.: Strain softening with creep and exponential algorithm. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 111, 3/1985, S. 391-415, ASCE, 1985.
- [14] Bažant, Z.P. et al.: Improved prediction model for time-dependent deformations of concrete, Part 1-7. Materials and Structures, Vol. 24 (1991): S. 327-345 u. 409-421, Vol. 25 (1992): S. 21-28 u. 84-94 u. 163-169 u. 219-223, Vol. 26 (1993): S. 567-574.
- [15] Bažant, Z.P.; Huet, C.; Müller, H. S.: Comment on recent analysis of concrete creep linearity and applicability of principle of superposition. Materials and Structures, Vol. 27, S. 359-361, 1994.
- [16] Bažant, Z.P.; Najjar, L.J.: Nonlinear water diffusion in nonsaturated concrete. Materials and Structures, 1972.
- [17] Bažant, Z. P.; Prasannan, S.: Solidification theory for concrete creep. I: Formulation. II: Verification and application. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, 8/1989, S. 1691-1725, ASCE, 1989.

- [18] Bažant, Z. P.; Wittmann, F. H.: Creep and shrinkage in concrete structures. John Wiley & Sons, Chichester, 1982.
- [19] Bažant, Z. P.; Xi, Y.: Continuous retardation spectrum for solidification theory of concrete creep. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 121, 1/1995, S. 281-288, ASCE, 1995.
- [20] Bergner, H.: Rißbreitenbeschränkung zwangbeanspruchter Bauteile aus hochfestem Normalbeton. Dissertation, TH Darmstadt, 1994.
- [21] Bogert, P.A.J.; de Borst, R.; Nauta, P.: Simulation of the mechanical behaviour of young concrete. In: IABSE-Congress, Delft, 1987.
- [22] Borg, G.: Die Berechnung von ebenen, in ihrer Ebene belasteten Stahlbetonbauteilen mit der Methode der Finiten Elemente. Heft 406 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin, 1990.
- [23] de Borst, R.: Smearred cracking, plasticity, creep and thermal loading – a unified approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 62 (1987), S. 89-110, 1987.
- [24] de Borst, R.: Computational methods for localisation and failure. In: [243].
- [25] de Borst, R.; van den Boogaard, A. H.: Finite-element modelling of deformation and cracking in early-age concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, 12/1994, S. 2519-2534, ASCE, 1994.
- [26] de Borst, R.; Bicanic, N.; Mang, H.; Meschke, G. (Eds.): *Computational Modelling of Concrete Structures. Proceedings of the Euro-C 1998 Conference in Austria 1998*. A.A. Balkema-Verlag, Rotterdam, 1998.
- [27] de Borst, R.; van den Boogaard, A. H.; Sluys, L. J.; van den Bogert, P. A. J.: Computational issues in time-dependent deformation and fracture of concrete. In: [12], S. 309-325.
- [28] de Borst, R.; Peeters, P.P.J.M.: Analysis of concrete structures under thermal loading. *Computer Methods in applied Mechanics and Engineering* 77 (1989), S. 293-310, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1989.
- [29] Bournazel, J.P.; Moranville-Regourd, M.: Thermal effects, cracking and damage in young massive concrete. In: [212], S. 329-336.
- [30] Brameshuber, W.: Bruchmechanische Eigenschaften von jungem Beton. Dissertation am Institut für Massivbau und Baustofftechnologie der TH Karlsruhe, 1988.
- [31] Breitenbücher, R.: Zwangsspannungen und Rißbildung infolge Hydratationswärme. Dissertation am Lehrstuhl für Baustoffkunde und Werkstoffprüfung der TU München, 1989.
- [32] van Breugel, K.: Simulation of hydration and formation of structure in hardening cement-based materials. Dissertation, TU Delft, 1991.
- [33] van Breugel, K.: Temperature Development in Situ. In: [213].
- [34] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.; Musiol, G; Mühlig, H.: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1993.
- [35] Budelmann, H. (Hrsg.): *Technologie und Anwendung der Baustoffe - Festschrift zum 60. Geburtstag von F. Rostásy*. Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1992.
- [36] Byfors, J.: Plain concrete at early ages. Swedish Cement and Concrete Institute, Stockholm, 1980.
- [37] Carol, I.; Bažant, Z P.: Viscoelasticity with aging caused by solidification of nonaging constituent. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 119, 11/1993, S. 2253-2269, ASCE, 1993.
- [38] Carol, I.; Bažant, Z P.: Solidification theory: A rational and effective framework for constitutive modeling of aging viscoelasticity. In: [12], S. 177-188.

- [39] Carol, I.; Rizzi, E.; Willam, K.: On the formulation of isotropic and anisotropic damage. In: [26], S. 183-192.
- [40] Cervera, M.; Oliver, J.; Prato, T.: A thermo-chemo-mechanical model for the hydration and aging of concrete. In: [26], S. 513-522.
- [41] Chen, W.-F.; Han, D. J.: Plasticity for Structural Engineers. Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1988.
- [42] Chen, W.-F.; Saleeb, A. F.: Constitutive equations for engineering materials. Vol. 1: Elasticity and Modeling (Rev. Ed.). Elsevier Science B. V., Amsterdam, 1994.
- [43] Comité Euro-International du Béton: CEB-FIP Model Code 1990. Verlag Thomas Telford, London, 1993.
- [44] Cook, R. D.: Finite Element Modeling for stress analysis. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [45] Crisfield, M. A.: Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Vol. 1: Essentials. Vol. 2: Advanced Topics. John Wiley & Sons, Chichester, 1991/1997.
- [46] Czernin, W.: Zementchemie für Bauingenieure. Bauverlag, Wiesbaden-Berlin, 1977.
- [47] Derflinger, F.: Grundlagen der Bemessung von Fundamentplatten für die Eigen- und Zwangspannungen im Hinblick auf die Beschränkung der Stahlspannung und der Reißbreite. Bericht Nr. 1103/De/K des Lehrstuhls für Massivbau der TU München, 1982.
- [48] Deutscher Beton-Verein E. V. (Hrsg.): DBV-Merkblatt: Begrenzung der Rißbildung im Stahlbeton- und Spannbetonbau. Wiesbaden, 1986.
- [49] Deutscher Beton-Verein E. V. (Hrsg.): DBV-Merkblatt: Wasserundurchlässige Baukörper aus Beton. Wiesbaden, 1989.
- [50] Deutscher Betonverein (Hrsg.): Zwischenbericht der Arbeitsgruppe 'Theorie und Bemessung' im Arbeitskreis Qualitätssicherung für den Innenschalenbeton im U-Bahnbau. Mannheim-Wiesbaden, 1990.
- [51] DIN 1045: Beton und Stahlbetonbau, Bemessung und Ausführung (Ausgabe Juli 1988). Beuth-Vertrieb GmbH, Berlin, 1988.
- [52] DIN 1045-1: Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Teil 1: Bemessung und Konstruktion. Entwurf November 1998.
- [53] DIN 1164: Zement. Teil 1 (10/94): Zusammensetzung, Anforderungen. Teil 8 (11/78): Portland-, Eisenportland-, Hochofen- und Traßzement; Bestimmung der Hydratationswärme mit dem Lösungskalorimeter. Beuth-Verlag, Berlin.
- [54] Dinkler, D.; Kowalsky, U.: Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens. Bericht aus dem Institut für Statik der TU Braunschweig, 1998.
- [55] Dischinger, F.: Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken. Der Bauingenieur 20 (1939), Heft 5/6 und Fortsetzungen, 1939.
- [56] Dörr, K.: Ein Beitrag zur Berechnung von Stahlbetonscheiben unter besonderer Berücksichtigung des Verbundverhaltens. Dissertation TU Darmstadt, 1980.
- [57] Eberhardsteiner, J.: Synthese aus konstitutivem Modellieren von Beton mittels dreiaxialer, nichtlinear-elastischer Werkstoffgesetze und Finite-Elemente-Analysen dickwandiger Stahlbetonkonstruktionen. Dissertation, TU Wien, 1991.
- [58] Eberhardt, M.; Lokhorst, S. J.; van Breugel, K.: On the reliability of temperature differentials as a criterion for the risk of early-age thermal cracking. In: [212], S. 353-360.

- [59] Eibl, J.; Prommersberger, G.; Bachmann, H.: Rechnerische Erfassung des aus Hydratationswärme entstehenden Spannungszustandes am Beispiel der Talbrücke Frauenwald. *Beton- und Stahlbetonbau* (85), Heft 4, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1990.
- [60] Eierle, B.: Mindestbewehrung von Tunnelinnenschalen: Finite-Element-Untersuchungen zur Rißbildung im Lastfall Zwang. Diplomarbeit Nr. 302 am Lehrstuhl für Statik der TU München, 1993.
- [61] Eierle, B.: Computational viscoelasticity of aging materials. In: [243].
- [62] Emborg, M.: Thermal stresses in concrete structures at early ages. Doctoral Thesis 1989:73D, Div. of Struct. Eng., Luleå Univ. of Technology, 1990.
- [63] Emborg, M.: Development of Mechanical Behaviour at Early Ages Including Mathematical Models. In: [213].
- [64] Emborg, M.: Models and Methods for Computation of Thermal Stresses and Cracking Risks. In: [213].
- [65] Eurocode 2 – DIN V ENV 1992 Teil 1-1: Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken; Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau, Ausgabe Juni 1992.
- [66] Edvardsen, C. K.: Wasserdurchlässigkeit und Selbstheilung von Trennrissen in Beton. Heft 455 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, 1994.
- [67] Falkner, H.: Zur Frage der Rißbildung durch Eigen- und Zwängspannung infolge Temperatur in Stahlbetonbauteilen. Heft 208 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, 1969.
- [68] Falkner, H.: Fugenlose und wasserundurchlässige Stahlbetonbauten ohne zusätzliche Abdichtung. In: *Vorträge auf dem Deutschen Betontag 1983*, Deutscher Beton-Verein E.V. (Hrsg.), Wiesbaden, 1983.
- [69] Feenstra, P. H.: Computational Aspects of Biaxial Stress in Plain and Reinforced Concrete. Dissertation, TU Delft, 1993.
- [70] Fischer, J.; König, G.: Automatische Rißfindung und Netzgenerierung für die diskrete Rißabbildung. In: [242], S. 231-240.
- [71] Fischer, S.; Herold, M.; Perschk, A.; Reichelt, U.: Zur Berechnung von Temperaturzuständen in abschnittsweise hergestellten Betonbauteilen. *Beton- und Stahlbetonbau* (88), Heft 5, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1993.
- [72] Fischer, S.; v. Smuda, J.; v. Wolfersdorf, J.: Ein Beitrag zur Behandlung von Temperatur- und Feuchtefeldproblemen mittels der Finite-Element-Methode. *Bauingenieur* 66, S. 53-60, Springer-Verlag, 1991.
- [73] Fischer, S.; v. Smuda, J.; v. Wolfersdorf, J.; Herold, M.: Modellierung des Abbindens von Beton mittels der Finite-Elemente-Methode. *Bauingenieur* 66, S. 185-190, Springer-Verlag, 1991.
- [74] Fleig, T.: Lebensdaueranalyse unter Berücksichtigung viskoplastischer Verformung und Schädigung mit der Methode der Finiten Elemente. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1996.
- [75] Freiesleben, H.; Hansen, P.; Pedersen, E. J.: Maleinstrument til Kontrol at betons haerding. *Nordisk Beton*, No. 1, S. 21-25, Stockholm, 1977.
- [76] Freundt, U.; Madaleno, A. C. L.: Erfassung von Temperaturfeldern in Betonbauteilen infolge Hydratationswärme. In: Meskouris, K. (Hrsg.): *Baustatik – Baupraxis 7* (Tagung in Aachen 1999), A. A. Balkema Publishers, Rotterdam, 1999.

- [77] Gebhard, P.: Nichtlineares Materialverhalten bei der räumlichen Berechnung eines Tunnelvortriebes im Lockergestein. Berichte aus dem konstruktiven Ingenieurbau, Heft 2/91, TU München, 1991.
- [78] Geißler, M.; Meiswinkel, R.; Wittek, U.: Nichtlineare FE-Modellierung für die Stahlbetonbemessung nach EC2 und DIN 1045 E2/97. In: [242], S. 161-170.
- [79] Giesecke, J.: Berechnung von Wärmespannungen in plattenförmigen Massenbetonbauwerken. Beton- und Stahlbetonbau (61), Heft 8, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1966.
- [80] Grasser, E.; Luy, H.: Zur Berechnung, Bemessung und Konstruktion von Tiefgaragen. Beton- und Stahlbetonbau (93), Heft 9, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1998.
- [81] Grube, H.: Wasserundurchlässige Bauwerke aus Beton. Otto Elsner Verlag, Darmstadt, 1982.
- [82] Grube, H.; Hintzen, W.: Prüfverfahren zur Voraussage der Temperaturerhöhung im Beton infolge Hydratationswärme des Zementes. Beton, Heft 5, S. 230-234, Heft 6, S. 292-295, 1993.
- [83] Gutsch, A.-W.: Stoffeigenschaften jungen Betons – Versuche und Modelle. Dissertation am Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, TU Braunschweig, 1998.
- [84] Gutsch, A.-W.; Onken, P.: Zwangrißbildung und Werkstoffverhalten des jungen Betons. In: [35], S. 87-94.
- [85] Gutsch, A.-W.; Rostásy, F. S.: Young concrete under high tensile stresses - creep, relaxation and cracking. In: [212], S. 111-118.
- [86] Hahn, G.: Elastizitätstheorie. Teubner Verlag, Stuttgart, 1985.
- [87] Hamfler, H.: Berechnung von Temperatur-, Feuchte- und Verschiebungsfeldern in erhärtenden Betonbauteilen nach der Methode der finiten Elemente. Heft 395 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Beuth-Verlag, Berlin, 1988.
- [88] Helmus, M.: Mindestbewehrung zwangbeanspruchter dicker Stahlbetonbauteile. Heft 412 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin, 1990.
- [89] Hillerborg, A.; Modeer, M.; Petersson, P.-E.: Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements. Cement and Concrete Research Vol. 6, S. 773-782, 1976.
- [90] Hilsdorf, H. K.: Beton. In: Beton-Kalender Teil I, Verlag Ernst & Sohn, 1996.
- [91] Hilsdorf, H. K.; Müller, H. S.: Stoffgesetze für das Kriechen und Schwinden von Dischinger bis heute. In: [209], S. 193 - 212.
- [92] Hintzen, W.; Grube, H.: Analyse beobachteter Risse in Tunnelbauwerken. Beton- und Stahlbetonbau 90, Heft 8, S. 203-207, Heft 9, S. 223-227, 1995.
- [93] Hofstetter, G. und Mang, H. A.: Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures. Vieweg-Verlag, Braunschweig-Wiesbaden, 1995.
- [94] Hohberg, J.-M.: Nichtlineare Berechnungen mit Trennflächenelementen. In: Eibl, J.; Obrecht, H.; Wriggers, P. (Hrsg.): Finite Elemente – Anwendungen in der Baupraxis (1991). Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1992
- [95] Hordijk, D. A.: Local approach to fatigue of concrete. PhD thesis, TU Delft, 1991.
- [96] Huang, Z.: Beanspruchungen des Tunnelausbaus bei zeitabhängigem Materialverhalten von Beton und Gebirge. Dissertation am Institut für Statik der TU Braunschweig, 1991.
- [97] Huckfeldt, J.: Thermomechanik hydratisierenden Betons – Theorie, Numerik und Anwendung. Dissertation am Institut für Statik der TU Braunschweig, 1993.

- [98] Huckfeldt, J.; Duddeck, H.; Ahrens, H.: Numerical simulation of crack-avoiding measures. In: [212], S. 255-264.
- [99] Huckfeldt, J.; Oberbeck, N.: Zur Modellierung von Prozessen in Beton während Bau und Nutzung. In: Festschrift Duddeck, Bericht Nr.93-75 des Instituts für Statik der TU Braunschweig, 1993.
- [100] Hundt, J.: Wärme- und Feuchtigkeitsleitung in Beton unter Einwirkung eines Temperaturgefälles. Heft 256 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, 1975.
- [101] Jonasson, J.-E.: Slipform construction – calculation for assessing protection against early freezing. Swedish Cement and Concrete Research Institute, Nr. 4, Stockholm, 1984.
- [102] Jonasson, J.-E.: Modelling of Temperature, Moisture and Stresses in Young Concrete. Doctoral Thesis 1994:153D, Div. of Struct. Eng., Luleå Univ. of Technology, 1994.
- [103] Jonasson, J.-E.; Groth, P.; Hedlund, H.: Modelling of temperature and moisture field in concrete to study early age movements as a basis for stress analysis. In: [212], S. 45-52.
- [104] Jungwirth, D.: Begrenzung der Rißbreite im Stahlbeton- und Spannbetonbau aus der Sicht der Praxis. Beton- und Stahlbetonbau 80 (1985), Heft 7 und 8, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1985.
- [105] Just, T.: Diagramm zur raschen Ermittlung der Mindestbewehrung gemäß DIN 1045. Bauingenieur (65), S. 406, 1990.
- [106] Kachanov, L. M.: Introduction to Continuum Damage Mechanics. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.
- [107] Kehlbeck, F.: Einfluß der Sonneneinstrahlung auf Brückenbauwerke. Werner Verlag, Düsseldorf, 1975.
- [108] Kirchner, G.: Vorschlag zum Ermitteln von Temperaturverläufen infolge Hydratationswärme. Beton- und Stahlbetonbau 89, Heft 7, S. 197-200, Verlag Ernst & Sohn, 1994.
- [109] Kishi, T.; Maekawa, K.: Thermal and mechanical modelling of young concrete based on hydration process of multi-component cement materials. In: [212], S. 11-18.
- [110] Koenders, E. A. B.; van Breugel, K.: Numerical and experimental adiabatic hydration curve determination. In: [212], S. 3-10.
- [111] König, G.: Berechnen und gezieltes Begrenzen von Rißbreiten im Stahlbeton und Spannbeton In: Deutscher Beton Verein E. V. (Hrsg.): Vorträge auf dem Betontag 1985. Wiesbaden, 1986.
- [112] König, G.; Fehling, E.: Zur Rißbreitenbeschränkung im Stahlbetonbau. Beton- und Stahlbetonbau (83), Heft 6, S. 161-167, Heft 7, S. 199-204, 1988.
- [113] König, G.; Hosser, D.; Schobbe, W.: Sicherheitsanforderungen für die Bemessung von baulichen Anlagen nach den Empfehlungen des NABau – eine Erläuterung. Bauingenieur (57), S. 69-78, 1982.
- [114] König, G.; Lieberum, K.-H.; Tue, N.: Rißschäden an Betonbauteilen und eine Strategie zu ihrer Vermeidung. Bauingenieur (71), S. 155-161, 1996.
- [115] König, G.; Tue, V.: Grundlagen und Bemessungshilfen für die Rißbreitenbeschränkung im Stahlbeton und Spannbeton. Heft 466 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, 1996.
- [116] Kolb, H.: Ermittlung der Sohlreibung von Gründungskörpern unter horizontalem kinematischen Zwang. Dissertation am Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart, 1988.
- [117] Kondo, R.; Ueda, S.: Kinetics of hydration of cements. Proc. 5th. Int. Congr. Chem. Cement, Vol II, S. 203-248, Tokyo, 1968.
- [118] Kordina, K.: Beton unter Langzeitzugbeanspruchung. Bautechnik (76), S. 479-488, 1999.

- [119] Krajcinovic, D.: Essential structure of the damage mechanics theories. In: Tatsumi, T.; Watanabe, E.; Kambe, T. (Eds.): Proceedings of the XIXth. Int. Congress of Applied Mechanics, Kyoto, Japan, 25-31 August 1996. Elsevier-Verlag, Amsterdam, 1997.
- [120] Küchler: Hydratationsvorgange im Beton mit HYDRA. In: Vorträge auf dem 6. Sofistik Anwenderseminar, Schlangenbad, 1993.
- [121] Kupfer, H.: Kriterien der Rißbreitenbeschränkung. In: Deutscher Beton Verein E. V. (Hrsg.): Vorträge auf dem Betontag 1985. Wiesbaden, 1986.
- [122] Kupfer, H.; Kupfer, H.B.: Zur Bemessung der Tragwerke des U-Bahn-Baues. In: 25 Jahre U-Bahn-Bau in München. Schottenheim & Giess Offsetdruck. München, 1991.
- [123] Kurzawa, J.; Kiernozycki, W.: Thermische Spannungen hervorgerufen durch den Hydratationsproze des Zementes in massigen Fundamenten von Ingenieurkonstruktionen. Bauingenieur (57), S. 357-364, Springer-Verlag, 1982.
- [124] Laboratorium für den konstruktiven Ingenieurbau der TU München: Bericht über Messungen in Tunnelinnenschalen (U-Bahn München). Teil A: Vorversuch an einem Block, München, 1990.
- [125] Laboratorium für den konstruktiven Ingenieurbau der TU München: Bericht über Untersuchungen in Tunnelinnenschalen (U-Bahn München). Teil B: Variation der Bewehrung in verschiedenen Blöcken, München, 1992.
- [126] Laube, M.: Werkstoffmodell zur Berechnung von Temperaturspannungen in massigen Betonbauteilen im jungen Alter. Dissertation am Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, TU Braunschweig, 1990.
- [127] Lemaitre, J.: A Course on Damage Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [128] Leonhardt, F.: Vorlesungen über Massivbau – Vierter Teil. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
- [129] Lewis, R. W.; Morgan, K.; Thomas, H. R.; Seetharamu, K. N.: The finite element method in heat transfer analysis. John Wiley & Sons, Chichester, 1996.
- [130] Lindner, R.: Wasserundurchlässige Baukörper aus Beton. In: Betonkalender 1996, Band II, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1996.
- [131] Litzner, H.-U.: Grundlagen der Bemessung nach Eurocode 2. In: Betonkalender 1996, Band I, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1996.
- [132] Lohmeyer, G.: Weiße Wannen einfach und sicher. Beton-Verlag, Düsseldorf, 1991.
- [133] Lokhorst, S. J.; van Breugel, K.: From mikrostructural development towards prediction of macro stresses in hardening concrete. In: [212], S. 71-78.
- [134] Mainz, J.: Modellierung des Verbundtragverhaltens von Betonrippenstahl. Berichte aus dem konstruktiven Ingenieurbau 3/93, TU München, 1993.
- [135] Mangold, M.: Die Entwicklung von Zwang- und Eigenspannungen in Betonbauteilen während der Hydratation. Berichte aus dem Baustoffinstitut der TU München, Heft 1/1994, München, 1994.
- [136] Marx, W.: Berechnung von Temperatur und Spannungen in Massenbeton infolge Hydratation. Dissertation am Institut für Wasserbau der Universität Stuttgart, 1987.
- [137] Mehlhorn, G.: Grundlagen zur physikalisch nichtlinearen FEM-Berechnung von Tragwerken aus bewehrtem Konstruktionsbeton – Verbund zwischen Beton und Bewehrung und Modellierung von bewehrtem Konstruktionsbeton. Bauingenieur 71, S. 187-193, Springer-Verlag, 1996.

- [138] Menn, C.: Zwang und Mindestbewehrung. Beton- und Stahlbetonbau (81), Heft 4, 1986.
- [139] Meschke, G.: Consideration of aging of shotcrete in the context of a 3-D viscoplastic material model. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, S. 3123-3143, 1996.
- [140] Meschke, G.; Kropik, C.; Mang, H. A.: Numerical analysis of tunnel linings by means of a viscoplastic material model for shotcrete. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, S. 3145-3162, 1996.
- [141] Meschke, G.; Lackner, R.; Mang, A.: An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 42, S. 703-727, 1998.
- [142] Meyer, G.: Rißbreitenbeschränkung nach DIN 1045. Beton-Verlag, Düsseldorf, 1989.
- [143] Miehe, C.: Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse. Dissertation am Institut für Baumechanik und numerische Mechanik, Univ. Hannover, 1988.
- [144] Nagy, A.; Thelandersson, S.: Material characterization of young concrete to predict thermal stresses. In [212], S. 161-168.
- [145] Najjar, J.: Kontinuierliche Schädigung elastisch-spröder Körper. Habilitationsschrift. TU München, 1987.
- [146] Netzel, D.: Flächengründungen aus Sicht des konstruktiven Ingenieurbaus. Bautechnik (73), Heft 9, S. 582-594, 1996.
- [147] Neville, A. M.; Dilger, W. H.; Brooks, J. J.: Creep of plain and structural concrete. Construction Press, London - New York, 1983.
- [148] Ngo, D.; Scordelis, A. C.: Finite element Analysis of Reinforced Concrete Beam. ACI Vol. 64, S. 152-163, 1967.
- [149] Noakowski, P.: Die Bewehrung von Stahlbetonbauteilen bei Zwangsbeanspruchung infolge Temperatur. Heft 296 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin, 1978.
- [150] Noakowski, P.: Praxisgerechte Verfahren für die Bemessung von Stahlbetonbauteilen bei Zwangsbeanspruchung. Beton- und Stahlbetonbau (75), Heft 4, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1980.
- [151] Noakowski, P.: Verbundorientierte, kontinuierliche Theorie zur Ermittlung der Rißbreite. Beton- und Stahlbetonbau (80), Heft 7 und 8, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1985.
- [152] Noakowski, P.: Nachweisverfahren für Verankerung, Verformung, Zwangsbeanspruchung und Rißbreite. Heft 394 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin, 1988.
- [153] Oberbeck, N.: Instationärer Wärme-Feuchte-Schadstoff-Transport in Beton, Theorie und Berechnung. Dissertation am Institut für Statik der TU Braunschweig, 1995.
- [154] Onken, P.; Rostásy, F.: A practical planning tool for the simulation of thermal stresses and for the prediction of early thermal cracks in massive concrete structures. In: [212], S. 289-296.
- [155] Onken P.; Rostásy, F.: Wirksame Betonzugfestigkeit im Bauwerk bei früh einsetzendem Temperaturzwang. Heft 449 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin, 1995.
- [156] Paas, U.: Mindestbewehrung für verformungsbehinderte Betonbauteile im jungen Alter. Dissertation, U-GH Essen, 1998.
- [157] Parkus, H.: Thermoelasticity. Springer-Verlag, Wien - New York, 1976.

- [158] Paulini, P.; Bilewicz, D.: Temperature field and concrete stresses in a foundation plate. In: [212], S. 337-344.
- [159] Paulini, P.; Gratl, N.: Stiffness formation of early age concrete. In: [212], S. 63-70.
- [160] Pfefferkorn, W.; Steinhilber, H.: Ausgedehnte fugenlose Stahlbetonbauten. Beton-Verlag, Düsseldorf, 1990.
- [161] Plannerer, M.: Temperaturspannungen in Betonbauteilen während der Erhärtung. Dissertation am Baustoffinstitut der TU München, 1998.
- [162] Pravida, J.: Zur nichtlinearen adaptiven Finite-Element-Analyse von Stahlbetonscheiben. Dissertation am Lehrstuhl für Statik der TU München, 1999.
- [163] Pravida, J.; Wunderlich, W.: Ein adaptives Finite-Element-Verfahren zur nichtlinearen Berechnung von Stahlbetonscheiben. In: [242], S. 113-122.
- [164] Price, W.: Control of cracking in mass concrete. Dams concrete International (4), Nr. 10, S. 36-44, 1982.
- [165] Puche, M.: Rißbreitenbeschränkung und Mindestbewehrung bei Eigenspannungen und Zwang. Heft 396 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin, 1988.
- [166] Rehm, G.; Martin, H.: Zur Frage der Rißbegrenzung im Stahlbetonbau. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 8, 1968.
- [167] Reineck, K.-H.; Schlaich, J.: Zum Ansatz der Betonzugfestigkeit bei der Bemessung von Balken und Platten aus Konstruktionsbeton. In: [35], S. 75-86.
- [168] Reinhardt, H.W.; Blaauwendraad, J.; Jongendijk, J.: Temperature development in concrete structures taking account of state dependent properties. In: International Conference on Concrete at Early Ages, Volume I, Paris, 1982.
- [169] Richartz, W.: Einfluß des K_2O -Gehalts und des Sulfatierungsgrads auf das Erstarren und Erhärten des Zementes. Zement-Kalk-Gips (39), Heft 12, S. 678-687, Wiesbaden, 1986.
- [170] RILEM commission 42-CEA (Hrsg.): Properties of set concrete at early ages – State-of-the-art-report. Matériaux et constructions, Vol. 14 - Nr. 84, S. 399-450, Paris, 1981.
- [171] Roelfstra, P.E.; Salet, T.A.M.: Modelling of heat and moisture transport in hardening concrete. In: [212], S. 37-44.
- [172] Rostásy, F.: Baustoffe. Lehrbuchreihe Architektur, Kolhammer Verlag Stuttgart, Berlin, Köln, Mainz 1983.
- [173] Rostásy, F.: Risse infolge Zwang und Eigenspannungen. In: Deutscher Beton Verein E.V. (Hrsg.): Vorträge auf dem Betontag 1985. Wiesbaden, 1986.
- [174] Rostásy, F.; Henning, W.: Zwang und Rißbildung in Wänden auf Fundamenten. Heft 407 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, 1990.
- [175] Rostásy, F.; Koch, R.; Leonhardt, F.: Zur Mindestbewehrung für Zwang von Außenwänden aus Stahlleichtbeton. Heft 267 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, 1976.
- [176] Rostásy, F.; Laube, M.; Onken, P.: Zur Kontrolle früher Temperaturrisse in Betonbauteilen. Bauingenieur (68), Heft 1, Seite 5-14, Springer-Verlag, 1993.
- [177] Rostásy, F.; Tanabe, T.: Restraining Conditions. In: [213].
- [178] Rüsç, H.; Jungwirth, D.; Hilsdorf, H. K.: Creep and Shrinkage. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [179] Rots, J. G.: Computational modeling of concrete fracture. Dissertation, TU Delft, 1988.

- [180] Santhikumar, S.; Karihaloo, B.L.: Time-dependent behaviour of cracked and ageing concrete. In: [26], S. 455-465.
- [181] Saul, A. G. A.: Principles underlying the steam of concrete at atmospheric pressure. Magazine of Concrete Research, 1951.
- [182] Schikora, K.; Eierle, B.: Zur Beschränkung der Rißbreiten bei Tunnelinnenschalen aus wasserundurchlässigem Beton. Bauingenieur (72), S. 185-191, Springer-VDI Verlag 1997.
- [183] Schikora, K.; Eierle, B.: Bemessung mit Beschränkung der Rißbreiten hinsichtlich der Wasserundurchlässigkeit von Tunnelschalen. In: Deutscher Beton-Verein E. V. (Hrsg.): Tunnelschalen. Eigenverlag, Wiesbaden, 1996.
- [184] Schikora, K.; Eierle, B.: Berechnungsmodelle für Betonbauteile unter frühem Temperaturzwang. In: Meskouris, K. (Hrsg.): Baustatik – Baupraxis 7 (Tagung in Aachen 1999). A. A. Balkema Publishers, Rotterdam, 1999.
- [185] Schießl, P.: Mindestbewehrung zur Vermeidung klaffender Risse - 2. Fassung. Veröffentlichung des Instituts für Betonstahl und Stahlbetonbau e.V., München, 1985.
- [186] Schießl, P.: Einfluß von Rissen auf die Dauerhaftigkeit von Stahl- und Spannbetonbauteilen. Heft 370 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin, 1986.
- [187] Schießl, P.: Grundlagen der Neuregelung zur Beschränkung der Rißbreite. In: Heft 400 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin, 1989.
- [188] Schießl, P.; Reuter, C.: Maßgebende Einflußgrößen auf die Wasserdurchlässigkeit von gerissenen Stahlbetonbauteilen. In: Budelmann, H. (Hrsg.), Technologie und Anwendung der Baustoffe - Festschrift zum 60. Geburtstag von F. Rostásy, Verlag Ernst&Sohn, Berlin, 1992.
- [189] Schießl, P.; Reuter, C.; König, G.; Fischer, A.; Windels, R.: Rechen- und Bemessungsgrundlagen zur Beschränkung der Rißbreite im Stahlbeton- und Spannbetonbau. In: Heft 425 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin, 1992.
- [190] Schießl, P.; Wölfel, E.: Konstruktionsregeln zur Beschränkung der Rißbreite – Grundlage zur Neufassung DIN 1045, Abschnitt 17.6. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 1, 1986.
- [191] Schober, H.: Ein Modell zur Berechnung des Verbundes und der Risse im Stahl- und Spannbeton. Dissertation am Institut für Massivbau der Universität Stuttgart, 1984.
- [192] Schober, H.: Diagramme zur Mindestbewehrung bei überwiegender Zwangbeanspruchung. Beton- und Stahlbetonbau, Heft 3, 1990.
- [193] Schöppel, K.: Entwicklung der Zwangspannungen im Beton während der Hydratation. Berichte aus dem Baustoffinstitut der TU München, Heft 1/1994, München, 1994.
- [194] Schöppel, K.; Springenschmid, R.: The effect of thermal deformation, chemical shrinkage and swelling on restraint stresses in concrete at early ages. In: [212], S. 213-220.
- [195] Schreiber, O.: Rißverhalten von Tunnelinnenschalen im Lastfall Zwang. Diplomarbeit Nr. 282 am Lehrstuhl für Statik der TU München, 1991.
- [196] Schüssler, K.: Einige methodische Aspekte bei der Beschreibung der Kinetik der Strukturbildung von Betonen. Wiss. Zeitschrift der IHS Cottbus 4, S. 9-17, 1982.
- [197] Schütte, J.: Einfluß der Lagerungsbedingungen auf Zwang in Betonbodenplatten. Dissertation, TU Braunschweig, 1997.
- [198] de Schutter, G.; Taerwe, L.: Degree of hydration-based description of mechanical properties of early age concrete. Materials and Structures, Vol. 29, S. 335-344, 1996.
- [199] Scottish Development Department (Ed.): Technical memorandum (bridges) SB1/88: Early thermal cracking of concrete. Memorandum des Scottish Development Department, 1988.

- [200] Shah, S. P.; Swartz, S. E. (Editors): Fracture of Concrete and Rock: SEM-RILEM International Conference 1987 in Houston. Springer-Verlag, 1989.
- [201] Shen, J.-H.: Lineare und nichtlineare Theorie des Kriechens und der Relaxation von Beton unter Druckbeanspruchung. Heft 432 der Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin, 1995.
- [202] Shkoukani, H. T.: Kriechen und Relaxation des Betons bei Temperaturzwangsbeanspruchung. Dissertation. TH Darmstadt, 1990.
- [203] Simo, J. C.: On a fully three-dimensional finite strain viscoelastic damage model - formulation and computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 60, S. 153-173, 1987.
- [204] Simo, J.C.; Hughes, T. J. R.: *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [205] Simons, H.J.: Konstruktive Gesichtspunkte beim Entwurf "Weißer Wannen". *Bauingenieur* (63), S. 429-427, Springer-Verlag, 1988.
- [206] Simons, H. J.: Die Gleitfolienpressung bei weißen Wannen. *Bautechnik* (68), Heft 3, S. 98-101, Verlag Ernst & Sohn, 1991.
- [207] Simons, H.J.: Einige Hinweise zum Entwurf Weißer Wannen. *Beton- und Stahlbetonbau* (88), Heft 8, S. 205-210, Verlag Ernst & Sohn, 1993.
- [208] Sommer, R.: Wasserundurchlässige Becken und Behälter in Stahlbeton. Dissertation. U-GH Essen, 1993.
- [209] Specht, M. (Hrsg.): *Spannweite der Gedanken – Zur 100. Wiederkehr des Geburtstages von Franz Dischinger*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [210] Springenschmid, R.: Betontechnologie im Wasserbau. In: *Wasserbauten aus Beton*, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1987.
- [211] Springenschmid, R.: Die Ermittlung der Spannungen infolge von Schwinden und Hydratationswärme im Beton. *Beton- und Stahlbetonbau* (79), Heft 10, S. 263-269, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1984.
- [212] Springenschmid, R. (Ed.): *Thermal Cracking in Concrete at Early Ages. Proceedings of the International RILEM-Symposium 1994 in München*, Verlag E & FN Spon, London, 1995.
- [213] Springenschmid, R. (Ed.): *Prevention of Thermal Cracking in Concrete at Early Ages (State of the Art Report)*. Verlag E & FN Spon, London, 1998.
- [214] Springenschmid, R.; Breitenbücher, R.: Beurteilung der Reißneigung von jungem Beton bei Zwang. *Beton- und Stahlbetonbau* (85), Heft 2, S. 29-33, Verlag Ernst & Sohn, 1990.
- [215] Springenschmid, R.; Breitenbücher, R.: Über das Vermeiden von Rissen am Beispiel der Innenschale von Tunneln. *Zement und Beton*, Heft 4, 1985.
- [216] Springenschmid, R.; Breitenbücher, R.; Ballard, P.: Vergleich zwischen Berechnungen und Messungen von Zwangspannungen in jungem Beton. *Beton- und Stahlbetonbau* 83, Heft 4, S. 93-97, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1988.
- [217] Springenschmid, R., Breitenbücher, R.; Mangold, M.: Development of the cracking frame and the temperature-stress testing machine. In: [212], S. 137-144.
- [218] Springenschmid, R.; Plannerer, M.: Firstrisse in der Innenschale großer Tunnel – Ursachen und Wege zur Vermeidung. *Beton- und Stahlbetonbau* 92, Heft 3, S. 68-72, Heft 4, S. 109-112, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1997.
- [219] Staffa, M.: Vermeidung von Hydratationsrissen in Stahlbetonwänden. *Berichte aus dem konstruktiven Ingenieurbau – Heft 17*, Techn. Univ. Berlin, 1993.

- [220] Stein, E.; Barthold, F.-J.: Elastizitätstheorie. In: Der Ingenieurbau – Band Werkstoffe & Elastizitätstheorie, Verlag Ernst & Sohn, 1996.
- [221] Stempniewski, L., Eibl, J.: Finite Elemente im Stahlbeton. In: Betonkalender 1996/Teil II. Verlag Ernst & Sohn, Berlin, S. 577-647, 1996.
- [222] Stoffel, A.: Finite Elemente und Wärmeleitung - Eine Einführung. VCH Verlag, Weinheim, 1992.
- [223] Suanno, R. L. M.: Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung. Bericht Nr. 18 (1995) aus dem Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1995.
- [224] Tanabe, T; Ishikawa, Y.: Time-dependent behaviour of concrete at early ages and its modeling. In: [12], S. 435-452.
- [225] Thielen, G.; Grube, H.: Maßnahmen zur Vermeidung von Rissen im Beton. Beton- und Stahlbetonbau (85), Heft 6, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1990.
- [226] Thielen, G.; Hintzen, W.: Investigation of concrete behaviour under restraint with a temperature-stress test machine. In: [212], S. 145-152.
- [227] Thielen, G.; Hintzen, W.: Maßnahmen zur Vermeidung von Rissen in Tunnelinnenschalen aus Ortbeton. Beton, Heft 9, S. 522-526, Heft 10, S. 600-606, 1994.
- [228] Tölke, F.: Praktische Funktionenlehre – Erster Band. Springer-Verlag, Berlin, 1950.
- [229] Trost, H.: Dischingers grundlegende Arbeiten und neuere Erkenntnisse über die Auswirkungen des zeitabhängigen Werkstoffverhaltens in vorgespannten und nicht-vorgespannten Stahlbetonkonstruktionen. In: [209], S. 213 - 226.
- [230] Trost, H.; Cordes, H.; Ripphausen, B.: Zur Wasserdurchlässigkeit von Stahlbetonbauteilen mit Trennrissen. Beton- und Stahlbetonbau (84), Heft 3, Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1989.
- [231] Trost, H; Wolff, H.-J.: Zur wirklichkeitsnahen Ermittlung der Beanspruchungen in abschnittsweise hergestellten Spannbetontragwerken. Bauingenieur (45), Heft 5, S. 155- 169, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [232] Koordinierungsausschuß der Prüfämter und Prüffingenieure für Baustatik in Bayern (Hrsg.): Beschränkung der Rißbreite unter Gebrauchslast nach DIN 1045/88, Ziffer 17.6. Mitteilung C21/1991, München, 1991.
- [233] Vonk, R.A.; Rots, J.G.; Kanstad, T.; Ulm, F.J.; Navratil, J.: Examples of evaluation of computer codes for creep and shrinkage analysis of concrete structures. In: [12], S. 889-891.
- [234] Wang, Ch.; Dilger, W.H.: Prediction of temperature distribution in hardening concrete. In: [212], S. 21-28.
- [235] Weigler, H.; Karl, S.: Junger Beton, Beanspruchung – Festigkeit – Verformung (Teil 1 und 2). Betonwerk + Fertigteil-Technik, Hefte 6, S. 392-401, Heft 7, S. 481-484, 1974.
- [236] Wesche, K.: Baustoffkennwerte zur Berechnung von Temperaturfeldern in Betonbauteilen. In: Festschrift Prof. Dr. Riessauw, Genf, 1982.
- [237] Westmann, G.: Basic creep and relaxation of young concrete. In: [212], S. 87-94.
- [238] Willam, K.; Etsch, G.; Münz, T.: Localized failure in elastic-viscoplastic materials. In: [12], S. 327-345.
- [239] Wischers, G.: Zementtaschenbuch 1984. Bauverlag, Düsseldorf 1984.
- [240] Wischers, G.; Manns, W.: Ursachen für das Entstehen von Rissen in jungem Beton. Beton (23), Heft 4, S. 167-171, Heft 5, S. 222-228, 1973.

- [241] de Witte, F. C.; Feenstra, P. H.: DIANA – User's Manual (Release 6.1): Nonlinear analysis. TNO Building and Construction Research, Delft, 1996.
- [242] Wriggers, P.; Meißner, U.; Stein, E.; Wunderlich, W.: Finite Elemente in der Baupraxis – Beiträge zur Tagung FEM '98 in Darmstadt. Verlag Ernst & Sohn, 1998.
- [243] Wunderlich, W. (Ed.): Proceedings of the 1st European Conference on Computational Mechanics (ECCM'99) (on CD-ROM). München, 1999.
- [244] Wunderlich, W.; Redanz, W.: Die Methode der Finiten Elemente. In: Der Ingenieurbau – Band Rechnerorientierte Baumechanik, Verlag Ernst & Sohn, 1995.
- [245] Yamazaki, M.; Harada, H.; Tochigi, T.: Low-heat portland cement used for silo foundation mat - temperatures and stresses measured and analyzed. In: [212], S. 29-36.
- [246] Yoshioka, T.; Ohtani, S.; Sato, R.: Thermal cracking in wall of prestressed concrete egg-shaped digester. In: [212], S. 179-186.
- [247] Zaitsev, Y. B.; Wittmann, F. H.: Simulation of crack propagation and failure of concrete. Matériaux et constructions, Vol. 14 - Nr. 83, S.357-365, Paris, 1981.
- [248] Zeitler, W.: Untersuchungen zu Temperatur- und Spannungszuständen in Betonbauteilen infolge Hydratation. Dissertation am Institut für Massivbau der TH Darmstadt, 1983.
- [249] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente. Carl Hanser Verlag, München 1984.
- [250] Zilch, K.; Penka, E.; Schneider, R.: Nichtlineare Berechnungen im Massivbau – Materialmodelle und Sicherheitskonzepte. In: [242], S. 1-12.